

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ  
ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА**

*Оболонский М. О.*

Данная книга содержит полный курс лекций по технической физике. Материал предназначен для подготовки студентов средних и высших учебных заведений к сдаче зачета или экзамена и соответствует образовательному стандарту по данной дисциплине.

---

---

## ЛЕКЦИЯ № 1. Механика

---

---

**Механика** — перемещение тел относительно друг друга. Существует три вида механики: **кинематика** (движение без выяснения причины), **динамика** (движение с причиной), **статика**.

Способы описания движения:

### 1. Векторный

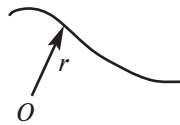


Рис. 1. Векторный способ описания движения

$$\vec{r} = \vec{r}(t),$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор точки;

$O$  — тело отсчета (неподвижное).

### 2. Координатный (в точку $O$ помещается система координат)

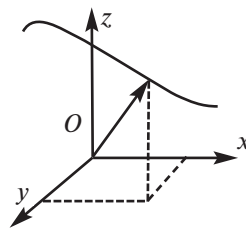


Рис. 2. Координатный способ описания движения

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

где

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \vec{r} = \vec{r}(x, y, z), \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

**Модель исследования материальная точка** — размерами и формой в условии данной задачи можно пренебречь.

**Модель абсолютно твердого тела** — совокупность жестко связанных материальных точек (расстояние между которыми не изменяется).

К кинетическим характеристикам поступательного движения относятся:

- 1)  $\vec{r}$  — радиус-вектор или  $S$  — путь;
- 2)  $\vec{v}$  ( $m/c$ ) — скорость;
- 3)  $\vec{a}$  ( $m/c^2$ ) — ускорение.

Рассмотрим скорость. Пусть тело в пространстве описывает траекторию:  $\vec{r}_1$  во время  $t_1$  и  $\vec{r}_2$  во время  $t_2$ , тогда  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  — вектор перемещения — направленный отрезок прямой, соединяющий конечное начальное положение точки на траектории. Пусть  $\Delta S$  — путь. Тогда  $\Delta t = t_2 - t_1$  и  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  (за время  $\Delta t$ ), следовательно,  $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}_{cp}$  — определили вектор средней скорости.

Если  $\Delta t \rightarrow 0$ , то  $|\Delta\vec{r}| \rightarrow dS$ , тогда

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \bar{v}_{cp} \text{ — модуль средней скорости.}$$

Мгновенная скорость, т. е. скорость в определенный момент времени, определяется как:

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{мгн}.$$

В физике скорость характеризует не только быстроту изменения расстояния, но и направление движения (вектор скорости направлен по касательной в данной точке траектории).

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}.$$

Рассмотрим трехмерное пространство, значит  $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ , тогда  $\vec{v} = v_x i + v_y j + v_z k$  и  $\bar{v} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ .

Получим:

$$\bar{k} = \left| \frac{dx}{dt} \bar{i} + \frac{dy}{dt} \bar{j} + \frac{dz}{dt} \bar{k} \right|$$
$$|\bar{v}| = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\bar{i} + y\bar{j} + z),$$

тогда очевидно, что:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; v_y = \frac{dy}{dt}; v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Так как  $v = \frac{dS}{dt}$ , то  $dS = vdt$ . Пусть между точками 1 и 2 существует некоторое расстояние, тогда

$$S_{12} = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

Рассмотрим ускорение  $\bar{a}$  — скорость изменения скорости. Рассмотрим точку в двух состояниях:  $t_1, \bar{v}_1$  и  $t_2, \bar{v}_2$ , тогда  $\Delta t = t_2 - t_1$  и  $\Delta \bar{v} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1$ . Заметим, что  $\bar{a}_{cp} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$  — изменение скорости в единицу времени. Если  $\Delta t \rightarrow 0$ , то

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

и

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\bar{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{a}.$$

Рассмотрим в трехмерном пространстве, значит  $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ , тогда

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$$

и

$$\bar{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Следовательно:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}) = \left| \frac{dv_x}{dt}\bar{i} + \frac{dv_y}{dt}\bar{j} + \frac{dv_z}{dt}\bar{k} \right|,$$

учитывая, что  $v_x = \frac{dx}{dt}$ ;  $v_y = \frac{dy}{dt}$ ;  $v_z = \frac{dz}{dt}$ , получим:

$$\bar{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k}$$

или

$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$  — представление вектора ускорения в системе координат.

#### Ускорение при криволинейном движении

Ускорение при криволинейном движении делят на **тангенциальное и нормальное**.

$\bar{a} = \bar{a}_n + \bar{a}_t$ ,  $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$ ,  $a_t$  — характеризует быстроту изменения по величине;

$a_n$  — характеризует быстроту изменения по направлению.

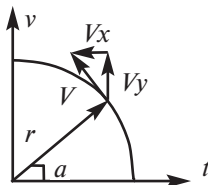


Рис. 3. Схема ускорения при криволинейном движении

Из рисунка 3 видно, что  $v_x = -v \sin \alpha$ ;  $v_y = v \cos \alpha$ , тогда

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(-v \sin \alpha)$$

и

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cos \alpha).$$

Следовательно:

$$a_x = -\frac{dv}{dt} \sin\alpha - v \cos\alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

и

$$a_y = \frac{dv}{dt} \cos\alpha - v \sin\alpha \frac{d\alpha}{dt}.$$

За время  $dt$  радиус-вектор повернется на угол  $d\alpha$ .

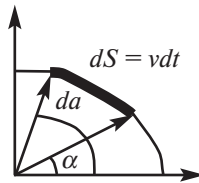


Рис. 4. Поворот радиус-вектора

Из рисунка 4 видно, что  $dS = r d\alpha$  и  $v dt = r d\alpha$ , тогда

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{v}{r}.$$

Подставив выражения для  $a_x$  и  $a_y$ , получим:

$$a_x = -\frac{dv}{dt} \sin\alpha - \frac{v^2}{r} \cos\alpha$$

и

$$a_y = \frac{dv}{dt} \cos\alpha - \frac{v^2}{r} \sin\alpha.$$

Совместим радиус-вектор с осью X, тогда  $\alpha = 0$ , а

$$a_x = -\frac{v^2}{r}, \quad a_y = \frac{dv}{dt}.$$

Так как  $a_x = a_n$ ;  $a_y = a_t$ , тогда

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

и

$$a_n = -\frac{v^2}{r}$$

(знак «-» означает, что  $a_n$  направлен в противоположную сторону движения).

Если траектория представляет прямую линию, то  $a_n = 0$  и  $\bar{a} = \frac{dv}{dt}$  перейдет в скалярную форму, т. е.  $a$  и  $v$  лежат на одной прямой.

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt}; t=0; \int_0^t a dt = \int_{v_0}^v dv \frac{dv}{dt},$$

но так как  $a = \text{const}$ , то  $a \int_0^t dt = at$ , тогда  $v = v_0 + at$  — уравнение для скорости. Заметим, что  $v = \frac{dS}{dt}$  пусть  $t=0$  и  $S = S_0$ , тогда

$$ds = v dt, \int_{S_0}^S dS = \int_0^t v dt.$$

Теперь

$$S - S_0 = \int_0^t (v_0 + at) dt = \int_0^t v dt + \int_0^t at dt = v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

Следовательно:

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \text{ — уравнение для перемещения.}$$

Движение материального тела будет поступательным, если любая прямая, проведенная в этом теле, при движении остается параллельной самой себе. Кинематические характеристики такого движения будут такими же, как и любой материальной точки этого тела.



Вращательное движение твердого тела — это точки тела, движущегося по окружности, центры которого лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

## 1. Кинематика вращательного движения

Уравнение вращательного движения:

$$\varphi = \varphi(t),$$

где  $\varphi$  — угол поворота.

За время  $dt$  любая точка повернется на угол  $d\varphi$ . Вектор  $\bar{\omega}$  связан с направлением вращения и направлен вдоль оси вращения. Направление вращения и направление вектора скорости представляют собой правый винт. Пусть во время  $t_1$  угол  $\varphi_1$ , а во время  $t_2$  —  $\varphi_2$ . Тогда  $\Delta t = t_2 - t_1$  и  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ . Значит,  $\bar{\omega}_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$  — среднее значение угловой скорости. Если  $\Delta t \rightarrow 0$ , то  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d\varphi}{dt} = \omega$  — угловая скорость. Скорость изменения угловой скорости — угловое ускорение  $\bar{\epsilon}$ .  $\bar{\epsilon}$  — направлен вдоль оси вращения, если  $\bar{\epsilon} > 0$ , то  $\bar{\epsilon} \uparrow \bar{\omega}$ , а если  $\bar{\epsilon} < 0$ , то  $\bar{\epsilon} \downarrow \bar{\omega}$ . Как и в поступательном движении  $\frac{\Delta\bar{\omega}}{\Delta t} = \bar{\epsilon}_{cp}$ , если  $\Delta t \rightarrow 0$ , то  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\epsilon}$  — мгновенное ускорение. Формула для мгновенного ускорения  $\bar{\epsilon} = \frac{d^2}{dt^2}$ .

Если тело вращается равномерно, то период и частота соответственно равны:  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  и  $\nu = \frac{1}{T}$ .

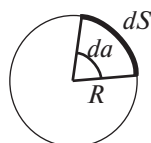


Рис. 5. Связь между линейными и угловыми скоростями и ускорением

Знаем, что  $dS = vdt$ . Из геометрии длина дуги равна  $dS = Rda$ , тогда  $vdt = Rda$  и  $v = \frac{Rda}{dt} = R\omega$ . Таким образом,  $v = R\omega$  — связь линейной и угловой скорости.

Заметим, что  $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$ , тогда  $|\vec{v}| = \omega r \sin \alpha = \omega R$ .  
Что касается ускорения, то

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon.$$

Значит,  $a_t = R\varepsilon$  — тангенциальное ускорение.

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = R^2 \omega^2 \text{ — нормальное ускорение.}$$

Следовательно,  $a_n = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}]$  — формула для нормального ускорения.

#### Динамика поступательного движения

Здесь будем считать, что  $m$  — масса тела — величина постоянная и не зависящая от скорости.

$m$  [кг] — мера инертности тела при поступательном движении. Это скалярная величина.

Импульс тела  $\vec{P} = \vec{v}m$  (кгм/с).

$\vec{F}$  — сила, векторная величина, мера взаимодействия тел. Сила характеризуется направлением, модулем и точкой приложения.

#### Законы Ньютона

##### Первый закон Ньютона

Всякое тело находится в покое до тех пор, пока воздействие на него других тел не выведет его из этого состояния. Системы, в которых выполняется первый закон Ньютона, называются **инерциальными**. **Гелиоцентрическая система** — инерциальная система, связанная с Солнцем.

##### Второй закон Ньютона

Уравнение движения  $\vec{F} = \vec{a}m$ . Для решения этого дифференциального уравнения второго порядка нужно задать начальные условия:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}, \quad \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt},$$

тогда  $\bar{F} = \frac{d(\bar{p})}{dt}$  — скорость изменения импульса тела равна равнодействующей силе. Пусть  $\frac{\Delta\bar{p}}{\Delta t} = \bar{F}$ , тогда

$$\bar{F}\Delta t = \bar{p}_2 - \bar{p}_1,$$

где  $\Delta p$  — изменение импульса тела.

Итак, изменение импульса тела равно импульсу силы, действующей на данное тело.

### Третий закон Ньютона

Силы, с которыми взаимодействуют тела, равны по величине и противоположны по направлению. Силы не уравновешивают друг друга, так как приложены к разным телам.

$$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$$

### Закон сохранения импульса

Пусть мы имеем систему из  $n$  тел, массы которых  $m_1 \dots m_n$ , каждое тело имеет скорость  $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n$ , тогда импульс каждого тела  $p_n = m_n \bar{v}_n$ .

Следовательно, импульс системы  $\bar{p} = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i$ . Система будет замкнута или изолирована, когда на нее не действуют внешние силы.

Мы будем рассматривать замкнутую систему, в которой результирующая сумма всех сил равна 0.

**Закон сохранения импульса** звучит следующим образом: импульс замкнутой системы есть величина постоянная (неизменяемая в течение времени), т. е.  $\bar{p} = \text{const}$ .

Докажем этот закон.

Из уравнения второго закона Ньютона для каждого тела можно записать:

$$\frac{d\bar{p}_1}{dt} = \sum_{i=1}^n F_i = \bar{f}_{12} + \bar{f}_{12} + \bar{f}_{1n} + \bar{F}_1,$$

где  $\bar{f}_{ik}$  — внутренние силы взаимодействия между  $m_i$  и  $m_k$  телами системы;

$\bar{F}_1$  — равнодействующая всех внешних сил, действующих на данное тело.

Тогда для всех тел получим систему дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{p}_1}{dt} = \bar{f}_{12} + \bar{f}_{13} + \dots + \bar{f}_{1n} + \bar{F}_1 \\ \dots \\ \frac{d\bar{p}_n}{dt} = \bar{f}_{n2} + \bar{f}_{n3} + \dots + \bar{f}_{nm-1} + \bar{F}_n \end{array} \right. .$$

По третьему закону Ньютона

$$\bar{f}_{12} = -\bar{f}_{21} \dots \bar{f}_{ik} = -\bar{f}_{ki},$$

далее получим

$$\frac{d}{dt} (\bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \dots + \bar{p}_n) = \sum \bar{F}_i \text{ и } \frac{d\bar{p}}{dt} = \sum \bar{F}_i.$$

Заметим, что для замкнутой системы  $\sum \bar{F}_i = 0$ , тогда  $\frac{d\bar{p}}{dt} = 0$  и  $p = \text{const}$ . Таким образом, закон сохранения импульса доказан.

### Механическая работа

Если под действием силы тело перемещается, то говорят, что сила совершает работу.

Рассмотрим переменную силу. Разобьем весь путь на элементарные участки  $d\bar{l}$  так, чтобы  $\bar{F}_i$  была постоянная сила. Тогда  $\Delta A_i = \bar{F}_i d\bar{l}_i = F_i \cos \alpha d\bar{l}_i$  — элементарная работа. Найдем всю работу:

$$A_{12} = \sum \Delta A_i = \sum \bar{F}_i d\bar{l}_i.$$

Возьмем теперь

$$\sum \bar{F}_i d\bar{l}_i = \int_1^2 \bar{F} d\bar{l},$$

таким образом

$$A_{12} = \int_1^2 \bar{F} d\bar{l}.$$

Здесь мы должны знать зависимость  $F$  от  $l$ . Если  $\vec{F} \perp d\vec{l}$  то  $A_{12} = 0$ .

### Механическая энергия. Кинетическая энергия

Механическая энергия складывается из кинетической и потенциальной. **Кинетическая энергия** — это энергия движения, она равна  $\frac{mv^2}{2}$ . **Потенциальная энергия** — энергия взаимодействия, она зависит от взаимного положения тел.

### Кинетическая энергия

Согласно определению  $dA = \vec{F}d\vec{l}$  и  $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$ . По второму закону Ньютона  $\vec{F} = \vec{a}m$ . Подставим в формулу для работы, получим:

$$dA = \vec{a}_t d\vec{l} + m,$$

Так как  $\vec{a}_n \perp d\vec{l}$ .

Поскольку  $\vec{a}_t = \frac{d\vec{v}}{dt}$ , то

$$dA = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{l},$$

здесь  $\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{v}$ , тогда

$$dA = \vec{v}d\vec{v}m.$$

Пусть теперь во время  $t_0$  скорость равна  $v_0$ , а во время  $t$  —  $v$ , тогда

$$\int_1^2 dA = \int_{v_0}^v mvdv.$$

Значит:

$$A_{12} = m \frac{v^2}{2} / \frac{v}{v_0} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = E_k - E_{k_0}.$$

Таким образом, получаем формулу для кинетической энергии тела:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{v}.$$

Работа будет положительной, если тело ускоряется, и отрицательной, если тело замедляется.

### Потенциальные силы. Потенциальная энергия

Все силы, существующие в природе, делятся на два класса:

- 1) **потенциальные (консервативные)** — силы, работа которых не зависит от формы траектории, а зависит от положения начальной и конечной точек;
- 2) **непотенциальные (десиппотивные)** — работа сил зависит от траектории (сила трения).

Область пространства, в которой действуют силы, называется **полем сил**. Определение критериев поля: циркуляция вектора  $F$  по любому контуру  $F$  равна 0, т. е.  $\oint \bar{F}d\bar{l} = 0$ . Физически интеграл представляет собой работу по замкнутому контуру.

### Потенциальная энергия

**Потенциальная функция** — зависимость потенциальной энергии от времени.

#### Теорема

Если сила  $\bar{F} = (F_x, F_y, F_z)$  потенциальна, то всегда существует скалярная функция от координат, такая, что компоненты силы  $F_x, F_y, F_z$  являются частными производными по соответствующим координатам, взятых со знаком «-», т. е.

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

где  $U$  — функция.

Заметим, что  $dA = \bar{F}d\bar{l}$  — по определению. Очевидно, что  $\bar{F} = (F_x, F_y, F_z)$  и  $d\bar{l} = (dx, dy, dz)$ , тогда:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

т. к.  $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$ , то

$$dA = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right).$$

С другой стороны,

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz,$$

тогда  $dA = -dU$ .

Следовательно:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = - \int_1^2 dU = U_1 - U_2$$

это убывь функции. Таким образом, функция  $U$  получила название **потенциальной энергии тела**.

### **Закон сохранения энергии**

Ранее было показано, что  $A_{12} = U_1 - U_2$ , с другой стороны

$$A_{12} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Приравняв эти равенства, получим:

$$U_1 - U_2 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

или

$$U_1 + \frac{mv_1^2}{2} = U_2 + \frac{mv_2^2}{2}.$$

Отсюда видим, что:

$$U + \frac{mv^2}{2} = \text{const}$$

это и есть **закон сохранения энергии**.

## **2. Динамика вращательного движения**

Для описания вращательного движения применяются следующие характеристики:  $I$  — **момент инерции** тела,  $L$  — **момент импульса**,  $M$  — **момент силы**.  $I$  — характеризует **инертность тела** при вращательном движении, т. е. аналог массы при поступательном движении. Момент инерции можно определить только относительно оси вращения. Пусть дано некоторое тело, которое вращается относительно оси  $O$ .

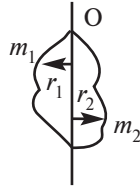


Рис. 6. Пример вращательного движения

$r_i$  — радиус вращения относительно оси. **Момент инерции**  $m_i$  относительно оси O определяется как  $I_i = m_i r_i^2$ . Чтобы найти полный момент инерции твердого тела, необходимо вычислить  $I = \sum I_i = \sum m_i r_i^2$ . Момент инерции зависит от того, как масса распределена по телу. Если масса распределена непрерывно, то  $dm = c dV$  (где  $c$  — плотность). Следовательно:

$$I = \int r^2 c dV = \int r^2 dm.$$

Рассмотрим теперь такую характеристику вращательного движения, как **момент импульса**. По определению  $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$  — векторная величина.

$\vec{p}$  — импульс тела,  $\vec{r}$  — радиус-вектор,  $\vec{L}$  — момент импульса. Тогда

$$|\vec{L}| = r p \sin \alpha; r \sin \alpha = h.$$

Если  $\vec{p}$  и  $\vec{r}$  лежат в одной плоскости, то  $\vec{L}$  находится в плоскости, перпендикулярной данной — по правилу векторного произведения.

Есть еще одна характеристика рассматриваемого движения  $\vec{M}$  — **момент силы**.

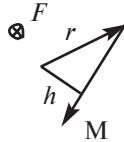


Рис. 7. Схема, определяющая момент силы



$$|M| = rF\sin\alpha; r\sin\alpha = h \text{ тогда } |M| = Fh.$$

Вектор момента силы лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости, в которой лежат  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ . Таким образом, по определению:

$$\vec{M} = [\vec{r}; \vec{F}].$$

### Второй закон Ньютона для вращательного движения

Рассмотрим равенство  $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$ . Продифференцируем его:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{r}, \vec{p}] = \left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] + \left[ \vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right].$$

Заметим, что  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , тогда  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Значит, получим

$$\left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] = [\vec{v}, m\vec{v}] = 0,$$

т. к.  $\vec{v} \uparrow\uparrow m\vec{v}$ , получим

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[ \vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right],$$

а учитывая, что  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ , получим

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[ \vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M},$$

Значит:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

это и есть второй закон Ньютона для вращательного движения.

Второй закон Ньютона можно записать в другом виде:

$$\vec{M} = I\epsilon.$$

Выведем это уравнение. Пусть на  $i$ -ую точку действует сила  $\vec{F}_i$ . Эта сила будет создавать вращающий момент. Силу  $\vec{F}$  можно

разложить на три составляющие. Параллельная составляющая силы  $\bar{F}$  не будет создавать вращательного движения. Теперь рассмотрим силы, перпендикулярные оси вращения. Составляющая силы, перпендикулярная оси вращения, не будет создавать вращательного движения. Таким образом, вращательный момент будет создавать  $\bar{F}_{касат}$  к траектории движения, т. е. силу, перпендикулярную радиусу вращения. Момент силы  $\bar{M}_i = [\bar{R}_i; \bar{F}_i]$ . Тело относительно оси  $Z$  имеет момент импульса  $\bar{L}_i = [\bar{R}_i; \bar{p}_i]$ .  $\bar{L}_i = [\bar{R}_i, m_i \bar{v}] = R_i m_i v_i \bar{n}$ , где  $n$  — вектор нормали, причем  $|\bar{n}| = 1$ . Так как движение по окружности, то  $v_i = R_i \omega$ , тогда  $\bar{L}_i = R_i^2 m_i \omega$ . Заметим, что  $m_i R_i^2 = I_i$  и  $\bar{L} = I_i \omega$ . Знаем, что  $\frac{dL_i}{dt} = \bar{M}_i$ , если просуммировать все точки тела, то получим:

$$\sum \frac{d(I_i \omega)}{dt} = \sum M_i,$$

тогда

$$\frac{d}{dt} (\omega \sum m_i R_i^2) = \sum M_i.$$

Так как  $\sum I_i = \sum m_i R_i^2 = I_z$ , то получим:

$$\frac{d}{dt} (\omega I_z) = \sum M_i = M_z.$$

Учитывая, что  $I_z = \text{const}$ , получим:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z$$

второй закон Ньютона для вращательного движения. Заметим, что  $I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z$ , тогда

$$I_z \bar{\epsilon} = \bar{M}_i$$

окончательная формула, которую мы хотели вывести вначале.

Остается отметить, что  $\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M}$ ,  $I_z \bar{\epsilon} = \bar{M}_z$  — разная запись второго закона Ньютона для вращательного движения.

### Закон сохранения момента импульса

Знаем, что

$$\bar{L}_z = I_z \bar{\omega}$$

момент импульса тела. Так как это векторная величина, то

$$\bar{L} = \sum \bar{L}_i.$$

Момент импульса замкнутой системы является величиной неизменной (не зависящей от времени). Используя формулы для момента импульса, докажем, что  $\sum I_i \bar{\omega}_i = \text{const}$ .

Воспользуемся третьим законом Ньютона для вращательного движения: если два вращающихся тела взаимодействуют и  $M_1$  — вращающий момент действия первого тела на второе, то второе тело действует на первое с  $M_2$ , при этом  $\bar{M}_1 = -\bar{M}_2$  и  $|\bar{M}_1| = |\bar{M}_2|$ .

Возьмем два тела и равенство  $\bar{M}_1 = -\bar{M}_2$ . Умножим равенство на  $\Delta t$ , тогда  $\bar{M}_1 \Delta t = -\bar{M}_2 \Delta t$ . Заметим, что

$$\bar{M}_1 = I_1 \frac{\Delta \bar{\omega}_1}{\Delta t}; \quad \bar{M}_2 = I_2 \frac{\Delta \bar{\omega}_2}{\Delta t}.$$

Подставим эти значения в  $\bar{M}_1 \Delta t = -\bar{M}_2 \Delta t$ , получим:

$$I_1 \Delta \bar{\omega}_1 = -I_2 \Delta \bar{\omega}_2.$$

Знаем, что  $\Delta \bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_{1k} - \bar{\omega}_{10}$ , где  $\bar{\omega}_{1k}$  — значение угловой скорости после взаимодействия,  $\Delta \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_{2k} - \bar{\omega}_{20}$ , где  $\bar{\omega}_{20}$  — значение угловой скорости до взаимодействия. Теперь получаем:

$$I_1(\bar{\omega}_{1k} - \bar{\omega}_{10}) = -I_2(\bar{\omega}_{2k} - \bar{\omega}_{20})$$

или

$$I_1 \bar{\omega}_{10} + I_2 \bar{\omega}_{20} = I_1 \bar{\omega}_{1k} + I_2 \bar{\omega}_{2k}.$$

Отсюда мы видим, что момент импульса системы двух тел до взаимодействия равен моменту импульса системы двух тел после взаимодействия, при условии  $\bar{M}_{\text{внешних сил}} = 0$ .

### Кинетическая энергия вращательного движения

Пусть мы имеем систему из тел массой  $m_1 \dots m_n$  и скоростями  $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n$ . По определению кинетической энергии  $i$ -того тела, имеем:

$$E_{ki} = \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Для вращательного движения  $\bar{v}_i = \omega R_i$ , тогда:

$$E_k = \sum E_{ki} = \sum \frac{m_i R_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i R_i^2.$$

Так как  $\sum m_i R_i^2 = I$  — по определению момента инерции твердого тела. Тогда:

$$E_k = \frac{I \omega^2}{2}.$$

Таблица 1

### Связь поступательного движения с вращательным

Поступательное движение	Вращательное движение
$\bar{F}$	$\bar{M} = [\bar{r}, \bar{F}]$
$\bar{F} = m \bar{a}$	$\bar{M} = I \bar{\epsilon}$
$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}$	$\bar{M} = \frac{d\bar{L}}{dt}$
$\bar{p} = m \bar{v}$	$\bar{L} = [r, m \bar{v}]: L = I \bar{\omega}$
$\bar{p} = \text{const}$	$\bar{L} = \text{const}$
$E_k = \frac{mv^2}{2}$	$E_k = \frac{I\omega^2}{2}$
$dA = \bar{F} d\bar{l}$	$dA = M d\varphi$
$m$ — мера инертности тела	$I$ — мера инертности тела

---

---

## ЛЕКЦИЯ № 2. Колебательные движения. Физический и математический маятники

---

---

**Колебание** — процесс, характеризующийся той или иной степенью повторяемости. Колебания отличаются по характеру. Различают:

- 1) **собственные (свободные) колебания** — такие колебания, которые происходят в системе после того, как был дан первоначальный толчок или система была выведена из состояния равновесия;
- 2) **вынужденные** — колебания системы под воздействием внешней периодической силы;
- 3) **автоколебания** — вынужденные колебания, но момент воздействия определяется самой системой;
- 4) **параметрические колебания** — колебания, в которых один из параметров системы может изменяться;
- 5) **гармонические колебания** — колебания, происходящие по закону синуса или косинуса.

Пусть  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ ,  $X_M = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ , т. е. при движении по окружности,  $M$  будет совершать периодическое движение вдоль оси  $X$ .  $A$  — максимальное отклонение от положения равновесия. Найдем скорость и ускорение. Знаем, что  $v = \frac{dx}{dt} = x'$ , тогда:

$$x' = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0),$$

следовательно  $v_m = A\omega$  — амплитуда скорости. Ускорение

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = x'' = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Таким образом, мы видим, что скорость и ускорение изменяются по гармоническим законам с той же самой частотой.

### **Физический и математический маятники**

**Физический маятник** — любое твердое тело, которое может совершать колебания вокруг любой оси, не проходящей через центр

тяжести. **Математический маятник** — идеализированная система, представляющая материальную точку на длинной нерастяжимой нити. Найдем период колебания физического и математического маятника.

По второму закону Ньютона для вращательного движения:

$$M = I\varepsilon; \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}; M = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

По определению:

$$|M| = Fh; F = mg; h = l\sin\varphi \rightarrow M = -mgl\sin\varphi.$$

Приравнивая уравнения, получим:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + mgl\sin\varphi = 0.$$

Если маятник отклоняется на небольшие углы, то , значит:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + mgl\varphi = 0$$

описывает малые колебания физического маятника. Значит:

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I}; \omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}; T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}.$$

Следовательно, при малых углах период определяется только свойствами системы. Если взять математический маятник, то для него справедливы вышесказанные утверждения, и момент инерции относительно оси можно записать в виде:

$$I = ml^2,$$

подставив это уравнение в  $I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + mgl\varphi = 0$ , получим:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{ml^2} = 0,$$

откуда

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}; \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}; T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Это и есть формула для вычисления периода колебания математического маятника.

---

---

## ЛЕКЦИЯ № 3. Волны

---

---

Процесс распространения колебаний в упругой среде называется **механической волной**. Любые возмущения вещества и поля с течением времени называются **волной**. Существенным является то, что точки среды совершают колебания из положения равновесия. Волна называется **поперечной**, если колебания происходят перпендикулярно распространению волны. Волна называется **продольной**, если колебания точек среды совпадают с направлением распространения волны. От точки к точке передается лишь энергия колебательной волны. Волны бывают **бегущие** или **стоячие** (переноса энергии не происходит). Для характеристики волнового процесса вводят понятие **волновой поверхности (волнового фронта)**. **Волновая поверхность** — это поверхность, все точки которой колеблются в одинаковой фазе. Волновые поверхности по виду бывают **сферическими, плоскими и цилиндрическими**. Для плоской волны амплитуда постоянна.

Получим уравнение волны, распространяющейся вдоль оси  $X$ . Пусть некоторая точка совершает колебания по закону:

$$y_0(t) = A \sin \omega t.$$

Возьмем любую точку  $M$ . Пусть волна распространяется со скоростью  $v$ , и ей нужно некоторое время, чтобы дойти до  $M$   $\tau = \frac{x}{v}$  — время запаздывания. Тогда:

$$y_M(t) = A \sin \omega(t - \tau)$$

или

$$y_M(t) = A \sin \left( \omega t - \frac{\omega x}{v} \right),$$

здесь  $\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\nu}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} = k$  — волновое число. Тогда  $y_M(t) = A \sin \omega(t - \tau)$  — уравнение бегущей волны вдоль оси  $X$ .  $y(x, t)$  — смещение точки с координатой  $x$  в момент времени  $t$ .



Получим уравнение волны, распространяющейся в произвольном направлении. В такой волне смещение точек обозначается  $\xi = \xi(x, y, z, t)$ . Уравнение волны — функция от координат и времени, где  $(x, y, z)$  — координаты равновесного положения точек.

Пусть  $\xi_0$  — волновая поверхность в начальный момент времени. Тогда  $\xi_0 = A \cos \omega t$  — смещение точек на волновой поверхности. За время  $\tau$  волновая поверхность сместится на  $l$ :  $\tau = \frac{l}{v}$ , тогда

$$\xi = A \cos \omega(t - \tau) = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega l}{v}\right).$$

Заметим, что  $(\vec{n}, \vec{r}) = |\vec{n}| |\vec{r}| \cos \alpha = r \cos \alpha = l$ , значит,

$$\xi = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v} \vec{n} \vec{r}\right).$$

Обозначим  $\frac{\omega}{v} = k = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}$ . В итоге

$$\xi = A \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r})$$

это смещение точки, положение которой определяется радиус-вектором  $\vec{r}$  в любой момент времени. При распространении волны, направление которой определяется волновым направлением  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$  — в трехмерном пространстве

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha; k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \beta; k_z = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \gamma.$$

Тогда получим уравнение:

$$\xi(x, y, z, t) = A \cos(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)),$$

а при наличии начальной фазы  $\xi(\vec{r}, t) = A\cos(\omega t - k\vec{r} + \varphi_0)$ , получим уравнение, решением которого является это уравнение. Заметим, что:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) = -\omega^2 \xi, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k_x^2 \xi, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -k_y^2 \xi, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k_z^2 \xi. \end{cases}$$

Сложив эти уравнения, получим:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Это является волновым уравнением, решением которого будет:

$$\xi = A\cos(\omega t - k\vec{r}),$$

где  $v$  — скорость распространения волны.

#### Уравнение стоячей волны

При наложении двух или нескольких когерентных волн наблюдается интерференция света — в одних точках колебания усиливаются, а в других ослабляются. Волны когерентны, когда у них одна частота и разность фаз, и они не изменяются с течением времени. Если на пути волны поставить экран, то обратная волна будет отличаться на  $\pi$  и  $\frac{\lambda}{2}$ . Эти волны будут накладываться на прямую — будут интерферировать и образовывать стоячую волну.

$$\begin{cases} y_{\text{прям}} = A\cos(\omega t - kx), \\ y_{\text{обр}} = A\cos(\omega t + kx), \end{cases}$$

$$y_{\text{прям}} + y_{\text{обр}} = 2A\cos kx \cos \omega t = y_{\text{см}}(x, t)$$

это и есть уравнение стоячей волны, где  $2A\cos kx$  — амплитуда стоячей волны.

Если  $\cos kx = 1$ , то точки называют **кучностями**.

Если  $\cos kx = 0$ , то точки, которые совершают колебания, называют **узлами стоячей волны**.

Расстояние между соседними узлами называется **длиной стоячей волны**. В стоячей волне не наблюдается переноса энергии, так как обратная волна переносит энергию обратно.

---

---

## ЛЕКЦИЯ № 4. Молекулярно-кинетическая теория

---

---

### Основные правила молекулярно-кинетической теории (МКТ):

- 1) все тела состоят из атомов и молекул;
- 2) характер взаимодействия зависит от типов молекул и расстояния между ними;
- 3) все молекулы находятся в непрерывном хаотическом движении (тепловом).

Обозначим тепловое хаотическое движение  $\varepsilon_k$ , а кинетическую энергию  $U_k$ .

Газообразное состояние  $\varepsilon_k \gg U_k$ . Жидкость  $\varepsilon_k \approx U_k$ . Твердое тело  $\varepsilon_k \ll U_k$ .

Газ называется **идеальным**, если:

- 1) атомы и молекулы — материальные точки конечной массы;
- 2) атомы и молекулы сталкиваются как упругие шары;
- 3) атомы и молекулы не взаимодействуют друг с другом.

Состояние системы характеризуется параметрами системы: давлением, объемом и температурой. Уравнение состояния системы:

$$f(P, V, T) = 0.$$

Процесс — переход системы из одного состояния в другое. Изопроцесс — один из параметров системы не изменяется. Для изопроцессов будем полагать, что  $m = \text{const}$ . Рассмотрим каждый изопроцесс.

1. **Изотермический процесс:**  $T = \text{const}$ ,  $p_1 V_1 = p_2 V_2$ .

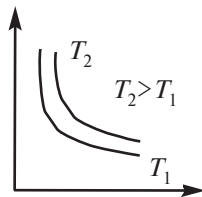


Рис. 8. Изотермы

2. **Изохорический процесс:**  $V = \text{const}$ ,  $\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2}$ ,  
 где  $p = p_0(1 + \alpha t)$ ;  $\alpha = 1/273$ .

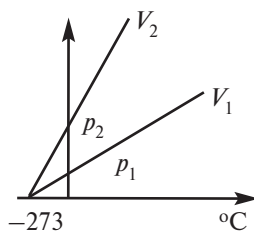


Рис. 9. Изохоры

3. **Изобарический процесс:**  $p = \text{const}$ ,  $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ ,  $V = V_0(1 + \alpha t)$ ;  
 $\alpha = 1/273$ .

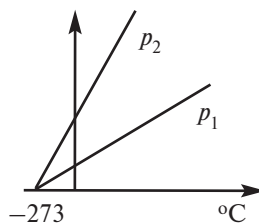


Рис. 10. Изобары

Уравнение Менделеева—Клайперона:

$$pV = \nu R t; \nu = \frac{m}{M}.$$

### 1. Основное уравнение МКТ

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории имеет вид:

$$p = \frac{1}{3} n m \langle v^2 \rangle,$$

где  $m$  — масса одной молекулы;  
 $n$  — концентрация;  
 $\langle v^2 \rangle$  — среднее значение скорости.

Для вывода этого уравнения будем использовать второй закон Ньютона и закон сохранения импульса. При тепловом движении возникает соударение молекул со стенками сосуда, эту силу и принято считать давлением. Рассмотрим соударение шаров о стенку сосуда:

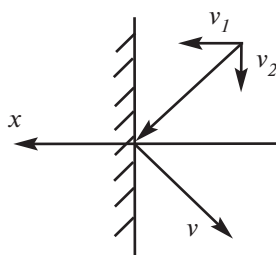


Рис. 11. Схема соударение шаров о стенку сосуда

При соударении относительно оси X изменяется только составляющая скорости  $v_1$ . При упругом соударении:

$$\Delta p_{\text{стенки}} = -2mv_1$$

изменение импульса в результате соударения молекул. Рассмотрим площадку  $\Delta S$ . На эту площадку за время  $\Delta t$  попадает  $N$  молекул, тогда импульс площадки  $2mv_1N$ . Знаем, что по второму закону Ньютона:

$$F\Delta t = 2mv_1N.$$

Найдем  $N$ . Мы имеем однородный газ, следовательно, масса и скорости молекул одинаковы.

Так как половина молекул летит к стенке, а другая от стенки, то  $N = \frac{1}{2}nV_{\text{косогоцилиндра}} = \frac{1}{2}n\Delta Sv_1\Delta t$ , где  $n$  — концентрация молекул в объеме. Подставим это значение во второй закон Ньютона:

$$F\Delta t = 2mv_1n\Delta S\Delta t \frac{1}{2}; \frac{F}{\Delta S} = nmv_1^2; p = nmv_1^2.$$

Теперь будем считать, что скорости молекул разные. Тогда  $n_1$  — концентрация молекул со скоростью  $v_1$ ,  $n_2$  — концентрация моле-

кул со скоростью  $v_i$ ,  $n_i$  — концентрация молекул со скоростью  $v_i$ .  
Далее будем иметь:

$$P_x = mn_1v_{1x}^2 + mn_2v_{2x}^2 + \dots = m \sum_i n_i v_{ix}^2,$$

$$P_y = mn_1v_{1y}^2 + mn_2v_{2y}^2 + \dots = m \sum_i n_i v_{iy}^2,$$

$$P_z = mn_1v_{1z}^2 + mn_2v_{2z}^2 + \dots = m \sum_i n_i v_{iz}^2.$$

Согласно закону Паскаля о том, что давление распространяется одинаково, будем иметь:

$$\begin{aligned} 3p = P_x = P_y = P_z &= m \sum_i n_i v_{ix}^2 + m \sum_i n_i v_{iy}^2 + \\ &+ m \sum_i n_i v_{iz}^2 = m \sum_i n_i (v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2) \end{aligned}$$

Значит:

$$3p = m \sum_i n_i v^2.$$

Заметим, что:

$3p = m \sum_i n_i v^2$  — среднее значение квадратов скорости. Таким образом,

$$p = \frac{1}{3} mn \langle v^2 \rangle$$

собственно формула, которую мы выводили. Можно получить другую интерпретацию этой формулы, заметив, что  $\frac{m \langle v^2 \rangle}{2} = \langle \varepsilon_k \rangle$  — среднее значение кинетической энергии хаотического движения молекулы, тогда:

$$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_k \rangle$$

давление системы равно  $2/3$  от средней кинетической энергии, содержащейся в единице объема.

Следствие:

Знаем, что  $p = mn \langle v^2 \rangle$  и  $\frac{m \langle v^2 \rangle}{2} = \langle \varepsilon_k \rangle$ , тогда

$$\frac{m \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

Следовательно:

$$v_{cp} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

средняя квадратическая скорость. Также:

$$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_k \rangle; p = \frac{2}{3} n \frac{3}{2} kT = nkT,$$

таким образом:

$$p = nkT.$$

## 2. Барометрическая формула

Барометрическая формула связывает давление воздуха с высотой от земли. Для атмосферного воздуха характерно тепловое хаотическое движение, на которое накладывается притяжение относительно земли. Направим ось  $Z$ , как показано на рисунке 12, и рассмотрим столб воздуха:

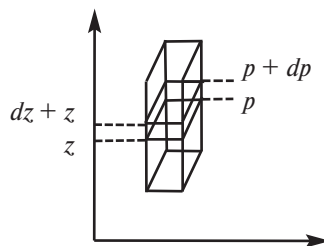


Рис. 12. Графическое отражение барометрической формулы



Здесь  $dp$  — давление, которое оказывает слой на площадку  $z$ .  $dF$  — действует со стороны молекул в слое  $dz$ . Таким образом:

$$\frac{dF}{\Delta S} = dp$$

по определению давления. Сила  $dF$  будет равна разности весов на высоте  $z$  и  $z + dz$ , т. е.  $dF = dm g$ . С другой стороны,  $dm = \rho dV = \rho dz \Delta S$ , тогда:

$$dF = \rho dz \Delta S g.$$

Если  $dz > 0$ , то  $dp < 0$ , тогда:

$$dp = -\rho g dz,$$

где  $dp$  — давление  $dz$  на  $z$ .

Знаем, что  $\rho = n m_{\text{молек}}$  ( $n$ -концентрация), массы молекул одинаковы и  $p = nkT$ ;  $n = \frac{p}{kT}$ ;  $c = \frac{p}{kT} m_{\text{молек}}$ . Подставим это значение в  $dp = -c g dz$ , получим:

$$dp = -\frac{p m_{\text{молек}} g}{kT} dz; \quad \frac{dp}{p} = -\frac{m_{\text{молек}} g}{kT} dz.$$

Пусть при  $z = 0$ ,  $p = p_0$ . Положим, что  $g = \text{const}$  и  $T = \text{const}$ , тогда:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \int_0^z \frac{m_{\text{молек}} g}{kT} dz.$$

Из этого уравнения получаем барометрическую формулу

$$p = p_0 e^{-\frac{mg}{kT} z}.$$

### 3. Распределение Больцмана

Пусть  $p = nkT$  и  $p_0 = n_0kT$ . Поделим эти уравнения друг на друга, получим  $p = p_0 \frac{n}{n_0}$ , тогда:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{n}{n_0} = e^{-\frac{mgz}{kT}} \rightarrow n = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

соотношение между числом в единице объема, разность высот которых равна  $z$ . Можно определить  $mgz = U(z)$  — потенциальная энергия, тогда  $n = n_0 e^{-\frac{U(z)}{kT}}$  — распределение числа частиц в единице объема в зависимости от их потенциальной энергии. Больцман высказал предположение, что эта формула верна для любого потенциального поля.

### 4. Распределение молекул газа по скоростям

Все движения в газе являются **равновероятными**. Направленные движения молекул также равновероятны. Рассмотрим модули скоростей. Нам необходимо найти количество молекул с определенной скоростью.

#### Функция распределения

Пусть  $dn = a dv$ , где  $a$  — коэффициент пропорциональности.  $a = f(v)$  — функция от величины скорости.  $dn = nf(v)dv$ . Таким образом, нам необходимо найти  $f(v)$ . Заметим, что  $dv$  — интервал скорости, тогда:

$$\frac{dn}{n} = f(v)dv$$

это доля скоростей, лежащих в интервале  $dv$  вблизи скорости  $v$ ,  $dv$  — единичный интервал.

$$\frac{dn}{n} = f(v)$$

это доля молекул в единичном интервале вблизи заданной скорости.

$$f(v) = 4pv^2 n \left( \frac{m}{2pkT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

формула распределения Максвелла.

Из уравнения Максвелла можно найти:

- 1)  $v = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$  — наиболее вероятная скорость;
- 2)  $v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$  — средняя квадратическая скорость;
- 3)  $v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$  — средняя арифметическая скорость.

Если на газ не действуют внешние силы, то в газе устанавливается распределение скоростей Максвелла. Это характеризует степень хаотичности движения молекул в газе. Если устанавливается распределение Максвелла, то движение молекул полностью хаотическое.

### ***5. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы***

Число независимых величин, с помощью которых можно описать состояние механической системы, называют степенями свободы.

1. Рассмотрим атомарный газ:  $m(x, y, z)$  — молекулу можно описать функцией от трех координат, значит, число степеней свободы  $i = 3$ .

2. Рассмотрим двухатомную молекулу. Пусть атомы связаны жестко. Для характеристики возьмем центр масс, для которого  $i_{\text{пост}} = 3$  (так как может двигаться поступательно относительно одной оси). Но система может вращаться относительно двух других осей, значит, еще  $i_{\text{вращ}} = 2$ , тогда  $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} = 5$ . Если молекулы связаны не жестко, то добавляется еще одна колебательная степень свободы.

3. Рассмотрим систему из  $N$  не жестко связанных молекул. Для нее  $i_{\text{пост}} = 3$ ,  $i_{\text{вращ}} = 2$ ,  $i_{\text{колеб}} = 3N - 6$ .

#### **Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы**

Если замкнутая система имеет во всех своих частях одинаковую температуру, то в среднем на каждую степень свободы прихо-

дится одинаковая энергия, равная  $\frac{1}{2}kT$ . Знаем, что  $\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2}kT$  — только поступательного движения, т. е.  $i = 3$ , тогда на одну степень свободы приходится . **Внутренняя энергия** идеального газа — энергия этого газа за вычетом кинетической энергии движения системы как целого и потенциальной энергии взаимодействия с внешними полями. Во внутреннюю энергию входят все движения частиц, из которых состоит тело. Тогда энергия одной молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2}kT.$$

Энергия одного моля:

$$U_m = \frac{i}{2}kTN_A = \frac{i}{2}RT,$$

тогда

$$U = \frac{m}{M} \frac{i}{2}RT; dU = \frac{m}{M} \frac{i}{2}RdT.$$

Если внутренняя энергия определяется как  $U_1(T_1, P_1, V_1)$ , то независимо от того, каким образом достигаются вновь эти параметры, значение внутренней энергии будет снова  $U_1, U_2(T_2, P_2, V_2)$  и  $\Delta U = U_2 - U_1$ . Это означает, что внутренняя энергия — полный дифференциал (приращение равно разности  $U_2$  и  $U_1$ ).

## **6. Работа и теплота как две формы передачи энергии**

Из механики известно, что энергию можно изменить, если система изменяется или над системой совершается работа. Также можно изменить внутреннюю энергию. Но внутреннюю энергию можно изменить, изменив температуру. Изменение энергии системы получило название **теплопередачи**. В теплопередаче работу совершают отдельно взятые на микроуровне (хаотические) молекулы.

**Закон сохранения:**

$$d'Q = dU + d'A.$$

Тепло, переданное телу, идет на совершение работы и приращение внутренней энергии. Если  $d' A$  совершает тело, то  $d' A > 0$ . Если  $d' A$  над телом, то  $d' A < 0$ .

#### **Работа газа при изменении объема**

Пусть  $p$  — давление газа,  $S$  — площадь поршня. Тогда по определению давления  $F = pS$ . Под действием силы поршень поднят на расстояние  $dx$  и совершил работу  $dA = Fdx = pSdx = pdV$ , тогда

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} pdV$$

работа газа при изменении объема от точки 1 до 2.

### **7. Работа газа при изопроцессах**

- 1) Изохорический процесс:  $V = \text{const}$ , следовательно  $dV = 0$ , а значит  $A = 0$  — работа не совершается.
- 2) Изобарический процесс:  $p = \text{const}$ , следовательно, формула для определения работы при изобарном процессе имеет вид:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} pdV = A_{12}p \int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1).$$

- 3) Изотермический процесс:  $T = \text{const}$ , следовательно

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} pdV.$$

Зная, что

$$pV = \frac{m}{M} RT \rightarrow p = \frac{m}{M} \frac{RT}{V},$$

получаем работу при изотермическом процессе:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

**Теплоемкость** — количество теплоты, которое необходимо для нагрева тела на 1 К. Если изменить  $dT$ , то  $c_T = \frac{dQ}{dT}$ . Удельная теплоемкость вещества  $c_{удел} = \frac{dQ}{mdT}$ . Обозначим за  $C$  — количество теплоты, которое нужно подвести к телу объемом 1 моль, чтобы подогреть его на 1 К. Молярные теплоемкости не являются функциями состояния.

### 8. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам

1. К изохорическому процессу:  $V = \text{const}$ , следовательно  $d'Q = dU + d'A$ , здесь  $d'A = 0$ , тогда  $d'Q = dU$ . Пусть  $m = M$ , тогда  $d'Q = c_V dT$ , где  $c_V$  — молярная теплоемкость при постоянном объеме. С другой стороны:  $dU = \frac{1}{2} R dT$ . В итоге получим:

$$\frac{i}{2} R dT = c_V dT; c_V = \frac{i}{2} R.$$

2. К изобарному процессу:  $p = \text{const}$ , следовательно,  $d'Q = dU + d'A$ . Пусть  $m = M$ .  $d'Q = c_p dT$ , где  $c_p$  — молярная теплоемкость при  $p = \text{const}$ .

$$dU = \frac{i}{2} R dT; dA = p dV$$

(для  $m = M$  — получаем  $pV = RT$ . Продифференцировав это равенство, имеем  $p dV = R dT$ ). Отметим, что  $dA = R dT$  — работа для расширения 1 моля, получим:

$$c_p dT = \frac{i}{2} R dT + R dT, c_p = \frac{i}{2} R + R; c_p = c_V + R$$

получили уравнение Майера.

3. К изотермическому процессу:  $T = \text{const}$ , следовательно,  $dT = 0$ , а значит,  $dU = 0$ . Имеем  $c_T = \frac{dQ}{dT} = \frac{dQ}{0} = \infty$  — резервуар должен иметь бесконечное количество теплоты.

### 9. Адиабатический процесс

**Адиабатический процесс** — это процесс без теплообмена с окружающей средой.

$$dA + dU = 0; dA = -dU$$

работа за счет внутренней энергии тела. При адиабатическом расширении температура газа уменьшается — это свойство используется в технике для сжижения газа. Для каждого газа существует критическая температура. Если температура газа выше критической, то мы не сможем превратить его в жидкость.

**Уравнение адиабаты. Уравнение Пуассона**

**Уравнение Пуассона** имеет вид

$$pV^\gamma = \text{const}; \gamma = \frac{c_p}{c_v},$$

где  $\gamma$  — показатель адиабаты. Получим это уравнение. Поскольку  $dQ = 0$ ,  $dA = -dU$ ,  $m = M$ , то

$$pdV = -c_v dT.$$

Уравнение Менделеева—Клапейрона для  $m = M$  будет  $pV = RT$ . Продифференцируем:

$$pdV + Vdp = RdT; dT = \frac{pdV + Vdp}{R}; pdV = -c_v \frac{pdV + Vdp}{R}.$$

По уравнению Майера имеем:

$$R = c_p - c_v,$$

тогда

$$pdV = -c_V \frac{pdV + Vdp}{c_p - c_V}; c_p pdV - c_V pdV = -c_V pdV - c_V Vdp;$$

$$c_V pdV = -c_V Vdp; \frac{c_p}{c_V} \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p}.$$

Положим,  $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$  — показатель адиабаты, тогда

$$\gamma \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p};$$

$$\gamma \ln V = -\ln p + \ln c; pV^\gamma = \text{const}$$

есть **уравнение Пуассона**. При адиабатическом процессе изменение объема происходит как непосредственно за счет изменения объема, так и при понижении температуры. Заметим, что

$$c_{ad} = \frac{dQ}{T} = \frac{0}{T} = 0; dA = -dU; dU = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R dT;$$

$$dA = -\frac{m}{M} \frac{i}{2} R dT.$$

Интегрируем последнее уравнение и получаем формулу для работы при адиабатическом процессе:

$$A_{12} = -\int_{T_1}^{T_2} \frac{i}{2} \frac{m}{M} R dT = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R (T_1 - T_2).$$

## 10. Второе начало термодинамики

Второе начало термодинамики указывает направление тепловых процессов.

В замкнутой системе перенос тепла всегда идет от более нагретого тела к менее нагретому. Если при прохождении процесса



в какой-то момент времени температура и давление разные, то такой процесс будет **неравновесным**. Процесс является обратным, если:

- 1) одинаково легко проходит в прямом и обратном направлении;
- 2) при протекании прямого и обратного процесса система проходит те же самые состояния;
- 3) система и окружающая среда приходят в первоначальное состояние.

Любой неравновесный процесс является **необратимым**.

## 11. Энтропия системы

Воспользуемся первым началом термодинамики:

$$dQ = dA + dU; m = M; dA = pdV; dU = c_V dT,$$

тогда:

$$dQ = dV + c_V dT; \frac{dQ}{T} = \frac{p}{T} dV + c_V \frac{dT}{T}.$$

Из уравнения Менделеева—Клайперона имеем:

$$pV = RT \rightarrow \frac{p}{T} = \frac{R}{V}.$$

Подставив это уравнение в предыдущее, получим:

$$\frac{dQ}{T} = \frac{R}{V} dV + c_V \frac{dT}{T}.$$

Заметим, что:

$$\frac{dT}{T} = d(\ln T); \frac{dV}{V} = d(\ln V),$$

тогда:

$$\frac{dQ}{T} = R d(\ln V) + c_V d(\ln T) = d(R \ln V) + d(c_V \ln T).$$

Получаем:

$$\frac{dQ}{T} = d(R \ln V + c_V \ln T).$$

Учтем, что  $R \ln V + c_V \ln T$  — полный дифференциал некоторой функции, которую обозначим  $S$ . Эта функция и называется **энтропией** (функция состояния системы)

$$\frac{dQ}{T} = dS.$$

Энтропия характеризует степень упорядоченности системы. Чем больше упорядочена система, тем меньше ее энтропия.

---

---

## ЛЕКЦИЯ № 5. Электрическое поле в вакууме

---

---

### 1. Электрический заряд

Известно, что в основе разнообразия явлений природы лежат четыре фундаментальных взаимодействия между элементарными частицами — **сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное**. Каждое взаимодействие связывается с определенной характеристикой частицы. Например, гравитационное взаимодействие зависит от масс частиц, электромагнитное — от электрических зарядов и т. д.

Электрический заряд частицы является одной из основных, первичных ее характеристик. Ему присущи следующие фундаментальные свойства:

- 1) электрический заряд может быть **положительным и отрицательным**;
- 2) заряд любого тела изменяется всегда на целое число элементарных зарядов;
- 3) не существует зарядов меньших элементарного.

Элементарный заряд по величине равен заряду электрона  $|e| = 10^{-19}$  Кл.

В основе электростатики лежат два установленных экспериментально закона: **закон сохранения заряда** и **закон Кулона**.

**Закон сохранения заряда:** в любой электрически изолированной системе, т. е. в системе, тела которой не обмениваются зарядами с внешними по отношению к ней телами, алгебраическая сумма зарядов сохраняется.

**Закон Кулона** позволяет определить силу взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов.

Под точечными зарядами подразумеваются такие заряженные тела, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними. Очевидно, что любое заряженное тело можно рассматривать как совокупность точечных зарядов. Закон Кулона утверждает, что сила взаимодействия  $F$  между двумя точечными заряда-

ми пропорциональна произведению величин зарядов  $q_1$  и  $q_2$  и обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r$  между ними:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности. В СИ значение

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \frac{\text{М}^2 \times \text{Н}}{\text{Кл}^2},$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$$

(электрическая постоянная). Эта сила направлена вдоль прямой, соединяющей заряды, и является силой притяжения, если заряды разноименные, и силой отталкивания, если они одноименные.

Запишем это утверждение в векторной форме:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r,$$

где  $\vec{e}_r$  — единичный вектор, направленный от заряда 1 к заряду 2.

#### Электрическое поле

Взаимодействие между зарядами осуществляется через поле. Всякий электрический заряд  $q$  изменяет определенным образом свойства окружающего его пространства — создает электрическое поле. Это поле проявляет себя в том, что помещенный в какую-либо его точку другой, «пробный» заряд испытывает действие силы.

Опыт показывает, что сила  $\vec{F}$ , действующая на неподвижный точечный пробный заряд  $q_0$ , всегда может быть представлена как

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}, \quad (1)$$

где вектор  $\vec{E}$  называют **напряженностью электрического поля** в данной точке. Вектор  $\vec{E}$ , как видно из (1), можно определить как силу, действующую на единичный положительный неподвижный заряд. Здесь предполагается, что пробный заряд  $q_0$  дол-

жен быть достаточно малым, чтобы его внесение не вызвало заметного искажения интересующего нас поля.

#### **Поле точечного заряда**

Из закона Кулона непосредственно следует, что напряженность поля неподвижного точечного заряда  $q$  на расстоянии  $r$  от него можно представить как

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r, \quad (2)$$

где  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная;

$\vec{e}_r$  — орт вектора  $r$ , проведенного из точки, в которой расположен заряд  $q$ , до интересующей нас точки поля.

Напряженность поля  $E$  измеряется в В/м. В зависимости от знака заряда  $q$  вектор  $\vec{E}$  направлен так же, как и  $\vec{r}$ , или противоположно ему.

По существу, формула (2) выражает закон Кулона. Весьма важно, что напряженность  $\vec{E}$  поля точечного заряда обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r$ . Вся совокупность экспериментальных фактов показывает, что этот закон справедлив для расстояний от  $10^{-13}$  см до нескольких километров, и пока нет никаких оснований ожидать, что этот закон не выполняется и при больших расстояниях.

#### **Принцип суперпозиции**

Напряженность поля системы точечных неподвижных зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i^2} \vec{e}_{ri}, \quad (3)$$

где  $r_i$  — расстояние между зарядом  $q_i$  и интересующей нас точкой поля.

Это утверждение называют принципом суперпозиции (наложения) электрических полей. Оно позволяет вычислять напряженность поля любой системы зарядов, представив ее в виде совокупности точечных зарядов, вклад каждого из которых дается формулой (2).

### Распределение зарядов

Для упрощения математических расчетов во многих случаях бывает удобно игнорировать тот факт, что заряды (электроны, ядра) имеют дискретную структуру, и считать, что они размазаны определенным образом в пространстве. Другими словами, удобно заменить истинное распределение точечных дискретных зарядов фиктивным непрерывным распределением. Это позволяет значительно упрощать расчеты, не внося сколько-нибудь значительных ошибок.

При переходе к непрерывному распределению вводят понятие плотности зарядов — объемной  $\rho$ , поверхностной  $\delta$  и линейной  $\lambda$ . По определению

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \delta = \frac{dq}{dS}, \lambda = \frac{dq}{dl} \quad (4)$$

где  $dq$  — заряд, заключенный соответственно в объеме  $dV$ , на поверхности  $dS$  и на длине  $dl$ .

С учетом этих распределений формула (3) может быть представлена в другой форме. Например, если заряд распределен по объему, то надо заменить  $q_i$  на  $dq = \rho dV$  и  $\sum$  на  $\int$ , тогда

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dV}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{c r dV}{r^3}, \quad (5)$$

где интегрирование проводится по всему пространству, в котором  $\rho$  отлично от нуля.

Таким образом, зная распределение зарядов, мы можем полностью решить задачу о нахождении напряженности электрического поля по формуле (3), если распределение дискретно, или по формуле (5) и аналогичной ей, если распределение непрерывно. В общем случае расчет сопряжен со значительными трудностями (правда, принципиального характера). Действительно, для нахождения вектора  $\vec{E}$  надо вычислить сначала его проекции  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ , а это, по существу, три интеграла типа (5). И только в тех случаях, когда система зарядов обладает той или иной симметрией, задача, как правило, значительно облегчается.

### Геометрическое описание электрического поля

Зная вектор  $\vec{E}$  в каждой точке, можно представить электрическое поле очень наглядно с помощью линий напряженности, или линий вектора  $\vec{E}$ . Эти линии проводят так, чтобы касательная к ним в каждой точке совпадала с направлением вектора  $\vec{E}$ , а густота линий, т. е. число линий, пронизывающих единичную площадку, перпендикулярную линиям в данной точке, была бы пропорциональна модулю вектора  $\vec{E}$ . Кроме того, этим линиям приписывают направление, совпадающее с направлением вектора  $\vec{E}$ . По полученной картине можно легко судить о конфигурации данного электрического поля — о направлении и модуле вектора  $\vec{E}$  в разных точках поля. Так как напряженность поля в каждой данной точке пространства имеет лишь одно направление, то линии напряженности никогда не могут пересекаться.

## 2. Теорема Гаусса

### Поток вектора $\vec{E}$

Для большей наглядности воспользуемся геометрической картиной описания электрического поля (с помощью линий вектора  $\vec{E}$ ). Для упрощения рассуждений будем считать, что густота линий равна модулю вектора  $\vec{E}$ . Тогда, число линий, пронизывающих элементарную площадку  $dS$ , нормаль  $n$  которой составляет угол  $\alpha$  с вектором  $\vec{E}$ , определяется согласно рисунку 13 как  $E dS \cos \alpha$ . Эта величина и есть поток вектора  $\vec{E}$  сквозь площадку  $dS$ . В более компактной форме

$$d\Phi = E_n dS = E \cos \alpha dS,$$

где  $E_n$  — проекция вектора  $\vec{E}$  на нормаль  $n$  к площадке  $dS$ ;  
 $d\vec{S}$  — вектор, модуль которого равен  $dS$ , а направление совпадает с нормалью  $\vec{n}$  к площадке.

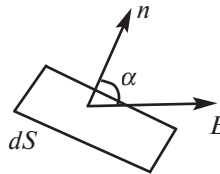


Рис. 13. Геометрическое описание электрического поля

Заметим, что выбор направления вектора  $\vec{n}$  (следовательно, и  $dS$ ) условен, его можно было бы направить и в противоположную сторону.

Если имеется некоторая произвольная поверхность  $S$ , то поток вектора  $\vec{E}$  сквозь нее:

$$\Phi = \int E dS. \quad (6)$$

Эта величина алгебраическая, она зависит не только от конфигурации поля  $\vec{E}$ , но и от выбора направления нормали. В случае замкнутых поверхностей принято нормаль  $\vec{n}$  выбирать вне области, охватываемой этими поверхностями, т. е. выбирать внешнюю нормаль, что в дальнейшем и будет всегда подразумеваться.

#### Теорема Гаусса

Поток вектора  $\vec{E}$  сквозь произвольную замкнутую поверхность  $S$  зависит только от алгебраической суммы зарядов, охватываемых этой поверхностью. А именно:

$$\int E dS = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{внутр}}. \quad (7)$$

Это выражение и составляет суть теоремы Гаусса: поток вектора  $\vec{E}$  сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов внутри этой поверхности, деленной на  $\epsilon_0$ .

Докажем теорему Гаусса. Сначала рассмотрим поле одного точечного заряда  $q$ . Окружим этот заряд произвольной замкнутой поверхностью  $S$  и найдем поток вектора  $\vec{E}$  сквозь элемент  $dS$ :

$$\Phi = \vec{E} d\vec{S} = E dS \cos \beta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dS \cos \alpha = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega, \quad (8)$$

где  $d\Omega$  — телесный угол, опирающийся на элемент поверхности  $dS$ , с вершиной в точке расположения заряда  $q$ .



Интегрирование этого выражения по всей поверхности  $S$  эквивалентно интегрированию по всему телесному углу, т. е. замене  $d\Omega$  на  $4\pi$ . Мы получим:

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

как и требует формула (7).

Заметим, что при более сложной форме замкнутой поверхности углы  $\alpha$  могут быть больше  $\frac{\pi}{2}$ , а значит,  $\cos\alpha$  и  $d\Omega$  в (8) принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Итак,  $d\Omega$  — величина алгебраическая: если опирается на внутреннюю сторону поверхности  $S$ , то  $d\Omega > 0$ , если же на внешнюю сторону, то  $d\Omega < 0$ .

Отсюда, в частности, следует: если заряд  $q$  расположен вне замкнутой поверхности  $S$ , то поток вектора  $\vec{E}$  через нее равен нулю. Для этого достаточно провести из заряда  $q$  коническую поверхность так, чтобы она оказалась касательной к замкнутой поверхности  $S$ . Тогда интегрирование выражения (8) по поверхности  $S$  эквивалентно интегрированию по  $\Omega$ ; внешняя сторона поверхности  $S$  будет видна из точки  $q$  под углом  $\Omega$ , а внутренняя — под углом  $\Psi$  (оба угла по модулю равны). В сумме получим нуль, и  $\Phi = 0$ , что также совпадает с утверждением (7). На языке линий вектора  $\vec{E}$  это означает, что сколько линий входит в объем, ограниченный поверхностью  $S$ , столько и выходит.

Теперь рассмотрим случай, когда электрическое поле создается системой точечных зарядов  $q_1, q_2$  и т. д. В этом случае согласно принципу суперпозиции  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n$ , где  $\vec{E}_n$  — поле, создаваемое зарядом  $q_n$ . Тогда поток вектора  $\vec{E}$  можно записать так:

$$\begin{aligned} \int \vec{E} d\vec{S} &= \int (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n) = \int \vec{E}_1 d\vec{S} + \\ &+ \int \vec{E}_2 d\vec{S} + \dots + \int \vec{E}_n d\vec{S} = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n. \end{aligned}$$

Согласно предыдущему, каждый интеграл в правой части равен  $\frac{q}{\varepsilon_0}$ , если заряд  $q$  находится внутри замкнутой поверхности  $S$ ,

и нулю, если он находится снаружи поверхности  $S$ . Поэтому в правой части останется алгебраическая сумма только тех зарядов, которые находятся внутри поверхности  $S$ .

Для завершения доказательства теоремы остается учесть случай, когда заряды распределены непрерывно с объемной плотностью  $\rho$ , зависящей от координат. В этом случае можно считать, что каждый элементарный объем  $dV$  содержит «точечный» заряд  $\rho dV$ . Тогда в правой части (7) будет:

$$q_{\text{внутр}} = \int \rho dV, \quad (9)$$

где интегрирование проводится только по объему, заключенному внутри замкнутой поверхности  $S$ .

Необходимо отметить: в то время как само поле  $\vec{E}$  зависит от конфигурации всех зарядов, поток вектора  $\vec{E}$  сквозь произвольную замкнутую поверхность  $S$  определяется только алгебраической суммой зарядов внутри поверхности  $S$ . Это значит, что если передвинуть заряды, то поле  $\vec{E}$  изменится всюду, в частности и на поверхности  $S$ . Изменится, вообще говоря, и поток вектора  $\vec{E}$  через  $S$ .

Однако, если передвижка зарядов произошла без пересечения поверхности  $S$ , поток вектора  $\vec{E}$  через эту поверхность останется прежним, хотя, повторяем, само поле  $\vec{E}$  может измениться, причем весьма существенно.

### Применение теоремы Гаусса

Поскольку поле зависит от конфигурации всех зарядов, теорема Гаусса, вообще говоря, не дает возможности найти это поле. Однако в ряде случаев теорема Гаусса оказывается весьма эффективным аналитическим инструментом: она позволяет получить ответы на некоторые принципиальные вопросы, не решая задачи, а также находить и само поле, причем чрезвычайно простым путем. Рассмотрим несколько примеров, а затем сформулируем некоторые общие выводы о том, в каких случаях применение теоремы Гаусса оказывается наиболее целесообразным.

#### Пример 1

О невозможности устойчивого равновесия заряда в электрическом поле.

Пусть в вакууме имеется система неподвижных точечных зарядов, находящихся в равновесии. Рассмотрим один из этих зарядов — заряд  $q$ . Окружим заряд  $q$  небольшой замкнутой поверхностью  $S$ . Допустим, что  $q > 0$ . Тогда для того, чтобы равновесие заряда  $q$  было устойчивым, необходимо, чтобы во всех точках поверхности  $S$  поле  $\vec{E}$ , образованное всеми остальными зарядами системы, было направлено к заряду  $q$ . Только в этом случае при любом малом смещении заряда  $q$  из положения равновесия на него будет действовать возвращающая сила, и положение равновесия действительно будет устойчивым. Но такая конфигурация поля  $\vec{E}$  вокруг заряда  $q$  противоречит теореме Гаусса: поток вектора  $\vec{E}$  сквозь поверхность  $S$  отрицателен, согласно же теореме Гаусса он должен быть равным нулю, поскольку этот поток создается зарядами, расположенными вне поверхности  $S$ . А равенство вектора  $\vec{E}$  нулю означает, что в каких-то точках поверхности  $S$  вектор  $\vec{E}$  направлен внутрь, а в каких-то обязательно наружу. Отсюда и следует, что устойчивое равновесие заряда в любом электростатическом поле невозможно.

*Пример 2*

Поле равномерно заряженной плоскости.

Пусть поверхностная плотность заряда равна  $\delta$ . Из симметрии задачи очевидно, что вектор  $\vec{E}$  может быть только перпендикулярным заряженной плоскости. Чтобы в этом убедиться, будем рассуждать от противного: предположим, что линии напряженности направлены под некоторым углом к перпендикуляру к плоскости. Если бы линии напряженности были направлены так, то это означало бы, что от верхней полуплоскости положительный заряд отталкивается сильнее, чем от нижней, что противоречит нашим предположениям о бесконечности плоскости и о постоянстве поверхностной плотности заряда на ней. Кроме того, ясно, что в симметричных относительно этой плоскости точках вектор  $\vec{E}$  одинаков по модулю и противоположен по направлению. Рассмотрим любую точку, лежащую справа от плоскости. Напряженность в ней направлена вправо; это следует из того, что она равна силе, действующей на единичный положительный заряд, который отталкивается от положительно заряженной плоскости. Если мы возьмем точку, расположенную симметрично с первой слева от плоскости, то повторением приведенных рассуждений убедимся, что в ней напряженность  $\vec{E}$  направлена в противоположную сторону по сравнению с направлением напряженности в первой точке.

Следовательно, линии напряженности будут прямыми, выходящими из плоскости и перпендикулярными к ней. Такая конфигурация поля подсказывает, что в качестве замкнутой поверхности  $S$ , фигурирующей в теореме Гаусса, следует выбрать прямой цилиндр, расположенный, как на рисунке 14, где предполагается  $\delta > 0$ .

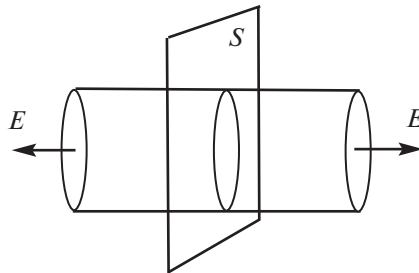


Рис. 14. Прямой цилиндр

Поток сквозь боковую поверхность этого цилиндра равен нулю, и поэтому полный поток через всю поверхность цилиндра будет  $2E\Delta S$ , где  $\Delta S$  — площадь каждого торца. Внутри цилиндра заключен заряд  $\delta\Delta S$ . Согласно теореме Гаусса

$$2E\Delta S = \frac{\delta\Delta S}{\epsilon_0},$$

откуда  $E = \frac{\delta}{2\epsilon_0}$ . Точнее это выражение следует записать так:

$$E_n = \frac{\delta}{2\epsilon_0}, \quad (10)$$

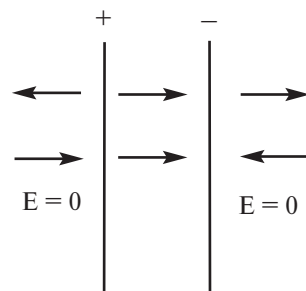
где  $E_n$  — проекция вектора  $E$  на нормаль  $n$  к заряженной плоскости, причем вектор  $n$  направлен от этой плоскости. Если  $\delta > 0$ , то и  $E_n > 0$ , а значит, вектор  $\vec{E}$  направлен от заряженной плоскости, как на рисунке 14; если же  $\delta < 0$ , то  $E_n < 0$ , а значит, вектор  $\vec{E}$  направлен к заряженной плоскости. Тот факт, что  $\vec{E}$  не зависит от расстояния до плоскости, означает, что соответствующее электрическое поле является однородным (как слева, так и справа от плоскости).

Полученный результат справедлив только для плоской бесконечной поверхности, ибо только в этом случае могут быть использованы приведенные соображения симметрии. Однако он приближенно справедлив и для области, прилегающей к средней части конечной равномерно заряженной плоской поверхности, вдали от ее краев.

*Пример 3*

Поле двух параллельных плоскостей, заряженных равномерно разноименными зарядами с плотностями  $\delta$  и  $-\delta$ .

Это поле можно легко найти как суперпозицию полей, создаваемых каждой из плоскостей в отдельности (рис. 15).



*Рис. 15. Поле двух параллельных плоскостей*

Здесь верхние стрелки соответствуют полю от положительно заряженной плоскости, нижние — от отрицательно заряженной плоскости. Между плоскостями напряженности складываемых полей имеют одинаковое направление, поэтому результат (10) просто удвоится, и результирующая напряженность между плоскостями:

$$E = \frac{\delta}{\epsilon_0}, \quad (11)$$

где под  $\delta$  — модуль поверхностной плотности заряда.

Вне этой области поле равно нулю. Таким образом, поле в данном случае сосредоточено между плоскостями и является однородным в этой области.

Полученный результат приближенно справедлив и для пластин конечных размеров, если только расстояние между пласти-

нами значительно меньше их линейных размеров (плоский конденсатор). Здесь заметные отклонения поля от однородности наблюдаются только вблизи краев пластин (этим при расчетах часто пренебрегают).

*Пример 4*

Поле бесконечного круглого цилиндра, заряженного равномерно по поверхности так, что на единицу его длины приходится заряд  $\lambda$ .

Из соображений симметрии следует, что поле здесь имеет радиальный характер, т. е. вектор  $\vec{E}$  в каждой точке перпендикулярен оси цилиндра, а модуль вектора  $\vec{E}$  зависит только от расстояния  $r$  до оси цилиндра. Это подсказывает, что замкнутую поверхность здесь надо взять в форме коаксиального прямого цилиндра (рис. 16). Тогда поток вектора  $\vec{E}$  сквозь торцы этого цилиндра равен нулю, а через боковую поверхность  $E_r 2\pi r h$ , где  $E_r$  — проекция вектора  $\vec{E}$  на радиус-вектор  $r$ , совпадающий по направлению с нормалью  $n$  к боковой поверхности цилиндра радиусом  $r$  и высотой  $h$ . По теореме Гаусса для случая  $r > a$  имеем:

$$E_r 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0},$$

Следовательно:

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}. \quad (12)$$

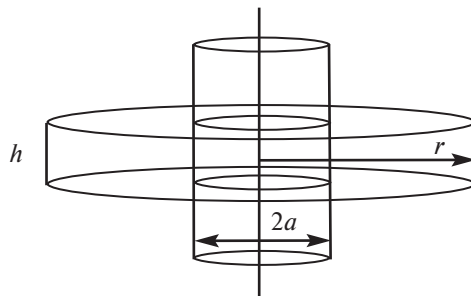


Рис. 16. Коаксиальный прямой цилиндр

При  $\lambda > 0$  вектор  $\vec{E}$  направлен от заряженного цилиндра, и наоборот. Если  $r < a$ , то замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому в этой области  $E = 0$  независимо от  $r$ . Таким образом, внутри равномерно заряженного по поверхности круглого бесконечного цилиндра поля нет.

*Пример 5*

Поле равномерно заряженной сферической поверхности.

Это поле, очевидно, центрально-симметричное: направление вектора  $\vec{E}$  в любой точке проходит через центр сферы, а модуль вектора  $\vec{E}$  должен зависеть только от расстояния  $r$  до центра сферы. Ясно, что при такой конфигурации поля в качестве замкнутой поверхности надо взять концентрическую сферу. Пусть ее радиус  $r > a$ , тогда по теореме Гаусса:

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0},$$

откуда

$$E_r = \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0} (r > a), \quad (13)$$

где  $E_r$  — проекция вектора  $E$  на радиус-вектор  $r$ , совпадающий по направлению с нормалью  $n$  к поверхности в каждой ее точке. Знак заряда  $q$  и здесь определяет знак проекции  $E_r$ , а следовательно, и направление самого вектора  $E$ : от заряженной сферы (при  $q > 0$ ) или к ней (при  $q < 0$ ). Если  $r < a$ , то замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому в этой области всюду  $\vec{E} = 0$ , т. е. внутри равномерно заряженной сферической поверхности электрическое поле отсутствует. Вне этой поверхности поле убывает с расстоянием  $r$  по такому же закону, как у точечного заряда.

*Пример 6*

Поле равномерно заряженного шара.

Пусть заряд  $q$  равномерно распределен по шару радиусом  $r$ . Поле такой системы, очевидно, также центрально-симметричное, поэтому и здесь для нахождения поля следует в качестве замкнутой поверхности взять концентрическую сферу. Для поля вне шара получится тот же результат, что и в предыдущем примере (13). Внутри же шара выражение для поля будет другим. Сфера ради-

усом  $r < a$  охватывает заряд  $q' = q\left(\frac{r}{a}\right)^3$ , т. к. в нашем случае заряды относятся как объемы, а последние как кубы радиусов. Поэтому согласно теореме Гаусса:

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q\left(\frac{r}{a}\right)^3,$$

откуда

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^3} r, \quad (r \leq a), \quad (14)$$

т. е. внутри равномерно заряженного шара напряженность растет линейно с расстоянием  $r$  от его центра.

Полученные в этих примерах результаты можно было бы найти и непосредственно интегрированием с помощью формулы (6). Однако использование теоремы Гаусса позволило нам решить эти задачи несравнимо более простым путем. Но число задач, легко решаемых с помощью теоремы Гаусса, весьма ограничено. Уже при решении задачи о нахождении поля такого симметричного распределения заряда, как у равномерно заряженного диска, теорема Гаусса оказывается бессильной. В этом случае конфигурация поля достаточно сложная, и замкнутой поверхности, обладающей необходимой для простоты вычисления потока вектора  $\vec{E}$  формой, здесь нет.

Использование теоремы Гаусса для расчета полей эффективно лишь в тех случаях, где поле обладает специальной симметрией (чаще всего плоской, цилиндрической или сферической). Конфигурация поля должна быть такой, чтобы, во-первых, можно было найти достаточно простую замкнутую поверхность  $S$  и, во-вторых, вычисление потока вектора  $\vec{E}$  свести к простому умножению  $E$  на площадь поверхности  $S$  или ее часть. Если этого нет, задачу о нахождении поля приходится решать непосредственно с помощью формулы (5).



### 3. Циркуляция вектора $\vec{E}$ . Потенциал

#### Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$

Из механики известно, что любое стационарное поле центральных сил является консервативным, т. е. работа сил этого поля не зависит от формы пути, а зависит только от положения начальной и конечной точек пути. Это означает, что работа сил такого поля по замкнутому пути равна нулю. Именно таким свойством обладает электростатическое поле — поле, образованное системой неподвижных зарядов. Если в качестве пробного заряда, переносимого из точки 1 заданного поля  $\vec{E}$  в точку 2, взять единичный положительный заряд, то элементарная работа сил поля на перемещении  $d\vec{l}$  равна  $\vec{E}d\vec{l} = E_l dl$ , а вся работа сил поля на пути от точки 1 до точки 2 определяется как:

$$\int_1^2 E_l dl. \quad (15)$$

Этот интеграл берется по некоторой линии (пути), поэтому его называют **линейным**.

Интеграл (15) по замкнутому пути называют циркуляцией вектора  $\vec{E}$ . Итак, циркуляция вектора  $\vec{E}$  в любом электростатическом поле равна нулю, т. е.

$$\int E_l dl = 0. \quad (16)$$

Это утверждение и называют теоремой о циркуляции вектора  $\vec{E}$ .

Поле, обладающее свойством (16), называют потенциальным. Значит, любое электростатическое поле является потенциальным.

Теорема о циркуляции вектора  $\vec{E}$  позволяет сделать ряд важных выводов, практически не прибегая к расчетам.

#### Пример

Линии электростатического поля  $\vec{E}$  не могут быть замкнутыми.

В самом деле, если это не так и какая-то линия вектора замкнута, то, взяв циркуляцию вектора  $\vec{E}$  вдоль этой линии, мы сразу же приходим к противоречию с теоремой (16). Значит, действитель-

но, в электростатическом поле замкнутых линий вектора не существует: линии начинаются на положительных зарядах и кончаются на отрицательных (или уходят в бесконечность).

### Потенциал

До сих пор мы рассматривали описание электрического поля с помощью вектора  $\vec{E}$ . Существует, однако, и другой адекватный способ описания — с помощью потенциала  $\varphi$ . Как мы увидим, второй способ обладает рядом существенных преимуществ.

Тот факт, что линейный интеграл (15), представляющий собой работу сил поля при перемещении единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2, не зависит от формы пути перемещения между этими точками, позволяет утверждать, что в электрическом поле существует некоторая скалярная функция координат  $\varphi(x)$ , убыль которой

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dl, \quad (17)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — значения функции  $\varphi$  в точках 1 и 2.

Таким образом, определенная величина  $\varphi(x)$  называется потенциалом поля в данной точке. Из сопоставления выражения (17) с выражением для работы сил потенциального поля (которая равна убыли потенциальной энергии частицы в поле) можно сказать, что потенциал — это величина, численно равная потенциальной энергии единичного положительного заряда в данной точке поля.

Потенциалу какой-либо произвольной точки  $O$  поля можно условно приписать любое значение  $\varphi > 0$ . Тогда потенциалы всех других точек поля определяются согласно (17) однозначно. Потенциал  $\varphi$  определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Значение этой постоянной не играет роли, так как все электрические явления зависят только от напряженности электрического поля. Последняя же определяется, как мы увидим, не самим потенциалом в данной точке поля, а разностью потенциалов в соседних точках поля.

Единицей потенциала является вольт (В).

### Потенциал поля точечного заряда

Формула (17) содержит не только определение потенциала  $\varphi(x)$ , но и способ нахождения этой функции. Для этого достаточ-

но вычислить интеграл  $\int E dl$  по любому пути между двумя точками и представить затем полученный результат в виде разности потенциалов между этими точками. Можно поступить и проще. Воспользуемся тем, что формула (17) справедлива не только для конечных перемещений, но и для элементарных  $dl$ . Тогда согласно этой формуле элементарная убыль потенциала на этом перемещении есть

$$-d = E dl. \quad (18)$$

Найдем таким способом потенциал поля неподвижного точечного заряда:

$$E dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \bar{e}_r d\bar{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = -d \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \text{const} \right)$$

где учтено,  $\bar{e}_r d\bar{l} = 1 \times (dl)r = dr$ , т. к. проекция вектора  $d\bar{l}$  на вектор  $\bar{e}$ , а значит, и на  $\bar{r}$  равна приращению модуля вектора  $\bar{r}$ , т. е.  $dr$ . Величина, стоящая в круглых скобках под знаком дифференциала, и есть  $\varphi(x)$ . Так как присутствующая здесь аддитивная константа никакой физической роли не играет, ее обычно опускают, стремясь сделать выражение для  $\varphi(x)$  проще. Таким образом, потенциал поля точечного заряда

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (19)$$

Отсутствие в этом выражении аддитивной константы означает, что мы условно полагаем потенциал на бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ) равным нулю.

#### **Потенциал поля системы зарядов**

Пусть система состоит из неподвижных точечных зарядов  $q_1, q_2, q_3 \dots$ . Согласно принципу суперпозиции в любой точке поля на-

пряженность  $\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 + \dots$  где  $\bar{E}_i$  — напряженность поля заряда  $q_i$ . Тогда можно записать, используя формулу (17):

$$\begin{aligned}\bar{E}d\bar{l} &= (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 + \dots)d\bar{l} = \bar{E}_1d\bar{l} + \bar{E}_2d\bar{l} + \bar{E}_3d\bar{l} + \dots \\ &= d_1 + d_2 + d_3 + \dots\end{aligned}$$

т. е. принцип суперпозиции оказывается справедливым и для потенциала. Таким образом, потенциал системы неподвижных точечных зарядов

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i}, \quad (20)$$

где  $r_i$  — расстояние от точечного заряда  $q_i$  до интересующей нас точки поля. Здесь также произвольная постоянная опущена. Это полностью соответствует тому факту, что всякая реальная система зарядов ограничена в пространстве, поэтому ее потенциал на бесконечности можно принять равным нулю.

Если заряды, образующие систему, распределены непрерывно, то, как обычно, мы считаем, что каждый элементарный объем  $dV$  содержит «точечный» заряд  $\rho dV$ , где  $\rho$  — объемная плотность заряда в местонахождении объема  $dV$ . С учетом этого формулу (20) можно представить как:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dV}{r}, \quad (21)$$

где интегрирование проводится или по всему пространству или по той его части, которая содержит заряды. Если заряды расположены только на поверхности  $S$ , то:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta dS}{r}, \quad (22)$$

где  $\delta$  — поверхностная плотность заряда;  
 $dS$  — элемент поверхности  $S$ .

Аналогичное выражение будет и в том случае, когда заряды распределены линейно.

#### Связь между потенциалом и вектором напряженности

Электрическое поле, как известно, полностью описывается векторной функцией  $\vec{E}(\vec{r})$ . Зная ее, мы можем найти силу, действующую на интересующий нас заряд в любой точке поля, вычислить работу сил поля при каком угодно перемещении заряда. Зная потенциал  $\varphi(x)$  данного электрического поля, можно достаточно просто восстановить и само поле  $\vec{E}(\vec{r})$ . Связь между  $\varphi$  и  $\vec{E}$  можно установить с помощью уравнения (18). Пусть перемещение  $d\vec{l}$  параллельно оси X, тогда  $d\vec{l} = \vec{i}dx$ , где  $\vec{i}$  — орт оси X;  $dx$  — приращение координаты X. В этом случае

$$\vec{E}d\vec{l} = \vec{E}\vec{i}dx = E_x dx,$$

где  $E_x$  — проекция вектора  $\vec{E}$  на орт  $\vec{i}$ .

Сопоставив последнее выражение с формулой (18), получим:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (23)$$

Аналогично можно получить соответствующие выражения для проекций  $E_y$  и  $E_z$ . А определив  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ , легко найти и сам вектор  $\vec{E}$ :

$$\vec{E} = -\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right) \quad (24)$$

Величина, стоящая в скобках, есть не что иное, как градиент потенциала  $\varphi$  ( $grad \varphi$  или  $\nabla \varphi$ ). Тогда уравнение (24) можно представить в более компактной форме:

$$\vec{E} = -grad \varphi. \quad (25)$$

Это и есть та формула, с помощью которой можно восстановить поле  $\vec{E}(\vec{r})$ , зная функцию  $\varphi(x)$ .

### Эквипотенциальные поверхности

Введем понятие **эквипотенциальной поверхности** — поверхности, во всех точках которой потенциал  $\varphi$  имеет одно и то же значение. Убедимся в том, что вектор  $\vec{E}$  направлен в каждой точке по нормали к эквипотенциальной поверхности в сторону уменьшения потенциала  $\varphi$ . В самом деле, проекция вектора  $\vec{E}$  на любое направление, касательное к эквипотенциальной поверхности в данной точке, равна нулю. А это значит, что вектор  $\vec{E}$  нормален к данной поверхности. Далее, возьмем перемещение  $d\vec{l}$  по нормали к поверхности в сторону уменьшения  $\varphi$ , тогда  $d\varphi < 0$  и  $\vec{E}_l > 0$ , т. е. вектор  $\vec{E}$  направлен в сторону уменьшения  $\varphi$  или в сторону, противоположную вектору  $\nabla\varphi$ .

Эквипотенциальные поверхности наиболее целесообразно проводить так, чтобы разность потенциалов для двух соседних поверхностей была бы одинаковой. Тогда по густоте эквипотенциальных поверхностей можно наглядно судить о значении напряженности поля в разных точках. Там, где эти поверхности расположены гуще, напряженность поля больше.

Далее, ввиду того, что вектор  $\vec{E}$  всюду нормален к эквипотенциальной поверхности, линии вектора  $\vec{E}$  ортогональны этим поверхностям.

### О преимуществах потенциала

Существует несколько весомых причин, убедительно свидетельствующих о том, что потенциал — понятие действительно весьма полезное. И не случайно, что этим понятием широко пользуются не только в физике, но и в технике.

Зная потенциал  $\varphi(\vec{r})$ , можно предельно просто вычислить работу сил поля при перемещении точечного заряда  $q'$  из точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = q'(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (26)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — потенциалы в точках 1 и 2.

Значит, искомая работа равна убыли потенциальной энергии заряда  $q'$  в поле при перемещении его из точки 1 в точку 2. Расчет работы сил поля по формуле (26) оказывается не только проще, но в некоторых случаях и единственно возможным.

### Пример

Заряд  $q$  распределен по тонкому кольцу радиусом  $a$ . Найти работу сил поля при перемещении точечного заряда  $q'$  из центра кольца на бесконечность.

Так как неизвестно, как распределен заряд  $q$  по кольцу, то ничего нельзя сказать о напряженности  $\vec{E}$  поля этого заряда. А это значит, что непосредственно вычислить работу как интеграл  $\int E_l dl$  здесь невозможно. Решим задачу с помощью потенциала.

Так как все элементы кольца находятся на одном и том же расстоянии  $a$  от центра кольца, то потенциал в этой точке  $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$ .

А потенциал на бесконечности  $\varphi = 0$ . Следовательно, работа

$$A = q' \varphi_0 = \frac{q' q_0}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

Во многих случаях оказывается, что для нахождения напряженности  $\vec{E}$  электрического поля легче сначала подсчитать потенциал  $\varphi$  и затем взять градиент от него, нежели вычислять  $E$  непосредственно. Это весьма существенное преимущество потенциала.

## 4. Электрический диполь

### Поле диполя

**Электрический диполь** — это система из двух одинаковых по модулю разноименных точечных зарядов  $+q$  и  $-q$ , находящихся на некотором расстоянии  $l$  друг от друга. Когда говорят о поле диполя, то предполагают сам диполь точечным, т. е. считают расстояния  $r$  от диполя до интересующих нас точек поля значительно больше  $l$ .

Поле диполя обладает осевой симметрией, поэтому картина поля в любой плоскости, проходящей через ось диполя, одна и та же, и вектор  $\vec{E}$  лежит в этой плоскости.

Найдем сначала потенциал поля диполя, а затем его напряженность. Согласно (20), потенциал поля диполя определяется как:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_- r_+}.$$

С учетом того,  $r > 1$ , то

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2}, \quad (27)$$

$p = ql$  — электрический момент диполя. Этой величине сопоставляют вектор, направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному:

$$\vec{p} = q\vec{l}, \quad (28)$$

где  $q > 0$  и  $l$  — вектор, направленный в ту же сторону, что и  $p$ .

Из формулы (27) видно, что поле диполя зависит от его электрического момента  $\vec{p}$ . Как мы увидим далее, и поведение диполя во внешнем поле также зависит от  $\vec{p}$ . Следовательно,  $\vec{p}$  является важной характеристикой диполя.

Следует также обратить внимание на то, что потенциал поля диполя убывает с расстоянием  $r$  быстрее, чем потенциал поля точечного заряда.

Для нахождения поля диполя воспользуемся формулой (27), вычислив с помощью нее проекции вектора  $\vec{E}$  на два взаимно перпендикулярных направления:

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos\theta}{r^2}, \quad E_v = -\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin\theta}{r^2}, \quad (29)$$

отсюда модуль вектора:

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_v^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}. \quad (30)$$

#### **Сила, действующая на диполь**

Поместим диполь во внешнее неоднородное электрическое поле. Пусть  $E_-$  и  $E_+$  — напряженности внешнего поля в точках, где расположены отрицательный и положительный заряды диполя. Тогда результирующая сила  $F$ , действующая на диполь, равна:

$$F = qE_+ - qE_- = q(E_+ - E_-).$$



Разность  $(E_+ - E_-)$  — это приращение  $\Delta E$  вектора  $\vec{E}$  на отрезке, равном длине диполя  $l$ , в направлении вектора  $\vec{l}$ . Вследствие малости этого отрезка можно записать

$$\Delta E = E_+ - E_- = \frac{\Delta E}{l} l = \frac{\partial E}{\partial l} l.$$

После подстановки этого выражения в формулу для  $F$  получим, что сила, действующая на диполь:

$$F = p \frac{\partial E}{\partial l}, \quad (31)$$

где  $p = ql$  — электрический момент диполя. Входящую в это выражение производную принято называть производной вектора по направлению. Знак частной производной подчеркивает, что эта производная берется по определенному направлению — направлению, совпадающему с вектором  $\vec{l}$  или  $\vec{p}$ .

Если нас интересует проекция силы  $F$  на некоторое направление  $x$ , то достаточно записать равенство (31) в проекциях на это направление, и мы получим

$$F_x = p \frac{\partial E_x}{\partial l}, \quad (23)$$

где  $\frac{\partial E_x}{\partial l}$  — производная соответствующей проекции вектора  $E$  по направлению вектора  $\vec{l}$  или  $\vec{p}$ .

#### Момент сил, действующих на диполь

Рассмотрим, как ведет себя диполь во внешнем электрическом поле в своей системе центра масс — будет он поворачиваться или нет. Для этого мы должны найти момент внешних сил относительно центра масс диполя центра масс:

$$\vec{M} = [\vec{p}\vec{E}] \quad (33)$$

Этот момент сил стремится повернуть диполь так, чтобы его электрический момент  $\bar{p}$  установился по направлению внешнего поля  $\bar{E}$ . Такое положение диполя является устойчивым.

#### Энергия диполя в поле

Мы знаем, что энергия точечного заряда  $q$  во внешнем поле равна  $W = q\varphi$ , где  $\varphi$  — потенциал поля в точке нахождения заряда  $q$ . **Диполь** — это система из двух зарядов, поэтому его энергия во внешнем поле

$$W = q_+\varphi_+ + q_-\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-),$$

где  $\varphi_+$  и  $\varphi_-$  — потенциал внешнего поля в точках расположения зарядов  $+q$  и  $-q$ .

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{\partial\varphi}{\partial l} l,$$

И, следовательно,

$$W = -(\bar{p}\bar{E}). \quad (34)$$

## 5. Проводники и диэлектрики

#### Проводники в электростатическом поле

Наэлектризуем какое-либо тело, т. е. сообщим ему некоторый заряд  $q$ . Тогда, как показывает опыт, в зависимости от строения и свойств тела этот заряд или перераспределится по телу, или же останется в том месте, где произведена электризация. Те тела, в которых электрический заряд может свободно перемещаться по всему телу, называют **проводниками** электричества. Тела же, в которых заряды не могут перемещаться из одной части в другую, называются **изоляторами**, или **диэлектриками**. Проводниками являются все металлы, а также электролиты и ионизованные газы. Такие вещества, как слюда, стекло, эбонит, фарфор, чистая вода, являются диэлектриками. Известна большая группа тел, обладающих способностью переносить заряд, но значительно слабее, чем в металлах; эти тела называются полупроводниками, Разница в проводимости различных тел обусловлена качественной разни-

цей в строении этих тел, в распределении и подвижности составляющих их микроскопических электрических зарядов (электронов, ионов, атомных ядер).

Рассмотрим сначала поведение проводников в электростатическом поле. Определим проводники как тела, в которых электрические заряды способны перемещаться под действием сколь угодно слабого электростатического поля. При электризации проводника сообщенный ему заряд будет перераспределяться до тех пор, пока в любой точке внутри проводника напряженность электрического поля, создаваемого данным распределением зарядов, не станет равной нулю:

$$\bar{E}_{\text{пров}} = 0. \quad (35)$$

Тогда:

$$\varphi_{\text{пров}} = \text{const}, \quad (36)$$

т. е. электрический потенциал всех точек внутри и на поверхности проводника одинаков. Сообщенный проводнику избыточный заряд вследствие взаимного отталкивания составляющих его элементарных зарядов должен, очевидно, распределиться по поверхности проводника. Это распределение зависит от формы проводника и должно быть таким, чтобы создаваемое им внутри проводника поле удовлетворяло условиям стационарности (35) и (36). Из постоянства потенциала вдоль поверхности следует, что линии электрического поля в изоляторах, окружающих проводник, должны быть перпендикулярны поверхности проводника. Сама напряженность поля вблизи поверхности проводника равна:

$$E = \frac{D}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (37)$$

В проводниках могут свободно перемещаться не только заряды, принесенные извне, но и микроскопические заряды, из которых состоят атомы и молекулы проводника (электроны, ионы). Поэтому при помещении незаряженного проводника во внешнее электрическое поле  $\bar{E}_0$  свободные микроскопические заряды будут перемещаться к его поверхности, положительные — по полю,

а отрицательные — против поля. На одном конце проводника будет скапливаться избыток положительного заряда, а на другом — избыток отрицательного до тех пор, пока создаваемое этими зарядами дополнительное поле  $\vec{E}_{\text{дон}}$  не скомпенсирует внешнее поле  $\vec{E}_0$  во всех точках внутри проводника. При этом суммарное поле:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{дон}} \quad (38)$$

внутри проводника и на его поверхности будет удовлетворять условиям (36) и (37), а вблизи проводника будет заметно отличаться от своего первоначального значения  $\vec{E}_0$ . Заряды на противоположных краях проводника называются индуцированными, или наведенными.

Отсутствие поля внутри проводника, помещенного в электрическое поле, широко используется в технике для электростатической защиты от внешних электрических полей.

Опыт показывает, что разные проводники, будучи заряженными одинаковыми зарядами, принимают разные потенциалы. Это указывает, что они отличаются друг от друга физическим свойством, которое характеризуется величиной, называемой **емкостью**.

Емкость проводника зависит от расположения окружающих тел, поэтому сначала определим понятие емкости уединенного проводника  $C$ :

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (39)$$

Емкость уединенного проводника есть физическая величина, численно равная заряду, который надо сообщить ранее незаряженному проводнику, чтобы его потенциал стал равен единице. Емкость измеряется в фарадах (Ф).

Емкость проводника зависит от окружающих данный проводник тел. Однако можно осуществить систему проводников с емкостью, практически не зависящей от окружающих тел. Примером такой системы является конденсатор.

Так называемый плоский конденсатор состоит из двух параллельных пластин, расположенных на расстоянии  $d$  друг от друга, малом по сравнению с их собственными размерами.

Под емкостью конденсатора  $C$  подразумевается величина, измеряемая отношением заряда на одной из пластин к разности потенциалов между пластинами:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (40)$$

Емкость плоского конденсатора можно выразить через величины, характеризующие его размеры:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}. \quad (41)$$

Из формулы (41) видно, что емкость плоского конденсатора пропорциональна площади пластины  $S$  и обратно пропорциональна расстоянию между пластинами  $d$ .

#### **Диэлектрики в электростатическом поле**

В идеальном диэлектрике нет свободных зарядов, способных под действием электрического поля перемещаться через весь диэлектрик. Атомы и молекулы диэлектрика содержат равные количества положительных и отрицательных микроскопических зарядов и в целом электрически нейтральны. В зависимости от строения молекул мы можем разделить все диэлектрики на две большие группы.

К первой группе принадлежат диэлектрики, у которых «центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов совпадают. Таковы, например, молекулы парафина, бензола, газообразный водород, азот и др. Молекулы таких диэлектриков в отсутствие внешнего электрического поля не обладают дательным моментом. Во внешнем поле «центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов молекулы смещаются в противоположные стороны на некоторое расстояние  $l$ , малое по сравнению с размерами молекулы. Каждая молекула при этом приобретает дипольный момент  $p = ql$ , величина которого в первом приближении прямо пропорциональна приложенному полю  $\vec{E}$ . Подобные молекулы называют неполярными, а дипольный момент  $\vec{p}$  — индуцированным дипольным моментом.

Вторую группу диэлектриков составляют такие вещества, как вода, нитробензол и иные, молекулы которых имеют асимметричное строение. При этом «центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов молекул не совпадают друг с другом, и молекула представляет собой диполь даже в отсутствие внешнего поля. Этот дипольный момент называют собственным дипольным моментом молекулы.

При отсутствии внешнего поля собственные дипольные моменты отдельных молекул вследствие теплового движения в каждый момент времени ориентированы в пространстве хаотично. Среднее значение проекции вектора  $\bar{p}$  на любое направление при этом тождественно равно нулю, и диэлектрик в целом дипольным моментом не обладает.

При помещении такого диэлектрика в однородное внешнее поле на каждый диполь будут действовать электрические силы, стремящиеся повернуть его вдоль поля. Однако хаотическое тепловое движение препятствует ориентации диполей по полю и вновь располагает диполи под самыми различными углами к направлению поля. В результате этих противоположных воздействий среднее значение проекции дипольного момента молекулы на направление поля  $p_E$  станет не равным нулю. Величина  $p_E$  будет в первом приближении прямо пропорциональна напряженности поля  $E$  и обратно пропорциональна абсолютной температуре. Весь диэлектрик в целом будет обладать дипольным моментом, направленным вдоль внешнего поля  $\bar{E}$ .

Дипольный момент единицы объема диэлектрика называют вектором поляризации:

$$\bar{P} = \frac{\sum_i \bar{p}_i}{V}, \quad (42)$$

где суммирование идет по всем молекулам,  $V$  — объем диэлектрика.

Вектор  $\bar{p}$  направлен вдоль электрического поля  $\bar{E}$ , в котором находится диэлектрик. Для не слишком сильных полей величина вектор поляризации пропорциональна величине напряженности поля:

$$\bar{P} = \epsilon_0 \chi \bar{E},$$

где безразмерный множитель  $\chi$  называется диэлектрической восприимчивостью данного вещества и зависит от его строения.

В результате возникновения объемной поляризации на границах диэлектрика, обращенных к пластинам конденсатора, концы молекулярных диполей окажутся не скомпенсированными соседними диполями, как это имеет место внутри диэлектрика. Поэтому на той границе диэлектрика, в которую входят линии напряженности электрического поля, окажется избыток отрицательного заряда с некоторой поверхностной плотностью  $-\delta$ . На противоположной грани диэлектрика окажется избыток положительного заряда с такой же по абсолютной величине поверхностной плотностью. Эти заряды называются поляризационными, или связанными, зарядами. Можно показать, что поверхностная плотность связанных зарядов равна нормальной составляющей вектора поляризации поляризованного диэлектрика:

$$P_n = \delta. \quad (43)$$

Имея дело с электростатическим полем в пустоте, мы вводили в рассмотрение линии напряженности. Линии напряженности в пустоте обладают тем свойством, что они тянутся непрерывно от одних зарядов до других или уходят в бесконечность. Не так обстоит дело в диэлектриках, если учитывать одни только свободные заряды (т. е. заряды, создающие внешнее электрическое поле). Например, на границах раздела диэлектриков возникнут связанные поверхностные заряды, и часть линий напряженности будет на них начинаться или кончаться. Таким образом, линии напряженности не пройдут непрерывно границу раздела диэлектриков. В связи с этим в диэлектриках перестает иметь смысл и теорема Гаусса в том виде, в котором она была дана ранее.

Можно, однако, ввести для характеристики поля внутри диэлектрика такой новый вектор  $D$ , линии которого пойдут непрерывно в диэлектриках, а также через границы их раздела. Этот вектор называется вектором электростатической индукции, он связан с вектором напряженности соотношением:

$$\bar{D} = \epsilon\epsilon_0\bar{E} = \epsilon_0(1 + \chi)\bar{E}, \quad (44)$$

где  $\varepsilon$  — диэлектрическая постоянная в той точке диэлектрика, где определяется значение вектора  $\overline{D}$ .

Из соотношения (44) следует, что вектор индукции  $\overline{D}$  направлен в каждой данной точке так же, как и вектор  $\overline{E}$ , но по численному значению он в  $\varepsilon$  раз больше.

По отношению к потоку вектора  $\overline{D}$  справедлива теорема Гаусса в следующем виде: поток вектора  $\overline{D}$  через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов, охватываемых этой поверхностью:

$$\oint_S D_n dS = \sum q_i. \quad (45)$$

#### **Энергия системы зарядов**

При образовании любой системы заряженных тел совершается работа, так как заряженные тела взаимодействуют друг с другом по закону Кулона и для размещения их в заданных местах надо совершить работу. Эта работа должна быть совершена какими-либо внешними силами за счет каких-либо внешних источников энергии, например, за счет энергии химических процессов в гальваническом элементе, с помощью которого тела заряжаются, и т. д. По закону сохранения энергии работа внешних сил, приложенных к системе, определяет изменение ее энергии. Таким образом, система заряженных тел будет обладать некоторой энергией. Если затем тела разряжаются или перемещаются, то их электрическая энергия частично или полностью перейдет обратно в другие виды энергии.

#### **Энергия системы точечных зарядов**

В качестве примера подсчитаем электрическую энергию системы самой простой системы состоящей из двух точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , находящихся на расстоянии друг от друга. Для этого достаточно подсчитать работу, которую затрачивают внешние силы на перенесение зарядов  $q_1$  и  $q_2$  из бесконечно удаленных областей, где силы взаимодействия между ними равны нулю, в данные точки поля.

Работа переноса зарядов  $q_1$  и  $q_2$  из бесконечности не зависит от порядка переноса зарядов. Перенесем сначала заряд  $q_1$  из бесконечности точку  $B_1$ . Работа перемещения заряда  $q_1$ , при условии, что заряд  $q_2$  еще остается в бесконечности, равна нулю, так как



равны нулю силы взаимодействия зарядов. После помещения заряда  $q_1$  в точку  $B_1$  перенесем заряд  $q_2$  в точку  $B_2$ . На это затратится работа, равная произведению величины заряда  $q_2$  на разность потенциалов между точкой  $B_2$  и бесконечно удаленной точкой. Потенциал бесконечно удаленной точки равен нулю, потенциал в точке  $B_2$  создается зарядом  $q_1$ . Таким образом работа  $A$ , затрачиваемая на помещение зарядов  $q_1$  и  $q_2$  на расстояние  $r$  друг от друга, равна:

$$A = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}.$$

Эта работа является мерой взаимодействия системы двух точечных зарядов:

$$w = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} = q_1 \varphi_1 = q_2 \varphi_2 = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2). \quad (46)$$

Здесь  $\varphi_1$  — потенциал, создаваемый зарядом  $q_2$  в точке  $B_2$ , где находится первый заряд,  $\varphi_2$  — потенциал, создаваемый зарядом  $q_1$  в точке  $B_1$ .

Если заряды одноименны, энергия имеет положительный знак, если заряды разноименные, знак энергии отрицательный.

Выражение (46) легко применить и к системе, состоящей из зарядов, расположенных на определенных расстояниях друг от друга. Эта энергия выразится через сумму работ, необходимых для переноса каждого из зарядов  $q_i$  из бесконечности в то место, где он должен быть расположен. При этом получается выражение:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i, \quad (47)$$

где  $\varphi_i$  — означает потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме  $i$ -го, в месте, где находится  $i$ -й заряд.

Энергия системы зарядов носит характер потенциальной энергии. Отсюда вытекает важное следствие. Как известно, устойчивому состоянию системы соответствует минимум потенциальной энергии. Выражение же энергии системы зарядов (47)

ни при каком их взаимном расположении не достигает минимума. Следовательно, устойчивая статическая конфигурация электрических зарядов невозможна.

#### **Энергия уединенного проводника**

Предположим, что проводник, первоначально незаряженный, заряжается определенным зарядом  $q$ , и при этом его потенциал принимает значение.

На зарядение проводника тратится работа, которая будет мерой энергии заряженного проводника, эта работа может быть получена обратно при разряде проводника.

Предположим, что на проводнике уже имеется некоторый заряд  $q$ , и подсчитаем работу  $dA$ , которую надо затратить, чтобы из бесконечности принести еще бесконечно малый заряд  $dq$ . Полная работа переноса всех зарядов при зарядении тела от потенциала 0 до потенциала  $\varphi$  выразится суммой элементарных работ  $dA$ , т. е. интегралом, взятым в пределах от 0 до  $\varphi$ :

$$A = \int_0^{\varphi} \varphi dq.$$

Эта работа определяет энергию заряженного тела между зарядом проводника и его потенциалом, получим:

$$W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (48)$$

#### **Энергия конденсатора**

Полученные формулы легко обобщить и в случае заряженного конденсатора. Процесс зарядения пластин можно представить себе следующим образом: первоначально нейтральные пластины постепенно заряжаются переносом бесконечно малых зарядов  $dq$  с одной пластины на другую. Этот перенос увеличивает положительный заряд одной пластины на  $dq$  и уменьшает положительный заряд, или, что то же самое, увеличивает отрицательный заряд другой на такую же величину. Если потенциал одной пластины

равен  $\varphi_1$ , а другой  $\varphi_2$ , то работа перемещения заряда с одной пластины на другую:

$$dA = (\varphi_1 - \varphi_2)dq = Uq.$$

Отсюда полная энергия заряженного конденсатора равна:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (49)$$

## 6. Энергия электрического поля

### О локализации энергии

Формула (47) определяет электрическую энергию  $W$  любой системы через заряды и потенциалы. Но, оказывается, энергию  $W$  можно выразить также и через величину, характеризующую само электрическое поле, — через напряженность  $E$ . Убедимся в этом сначала на простейшем примере плоского конденсатора. Пренебрегая искажением поля у краев пластин (краевым эффектом), получим:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \left(\frac{U}{h}\right)^2 Sh.$$

А поскольку  $U/h = E$  и  $Sh = V$  (объем между обкладками конденсатора), то:

$$W = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 \frac{V}{2}. \quad (50)$$

Полученная формула справедлива для однородного поля, заполняющего объем  $V$ .

Можно доказать, что энергию  $W$  можно выразить через  $E$  (в случае, если диэлектрик изотропный) по формуле:

$$W = \int \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \int \frac{ED}{2} dV. \quad (51)$$

Подынтегральное выражение в этом уравнении имеет смысл энергии, заключенной в объеме  $dV$ . Это подводит нас к весьма важной и плодотворной физической идее о локализации энергии в самом поле. Данное предположение нашло опытное подтверждение в области переменных во времени полей. Только там встречаются явления, которые можно истолковать на основе идеи о локализации энергии в поле. Именно переменные поля могут существовать независимо от возбудивших их электрических зарядов и распространяться в пространстве в виде электромагнитных волн. И опыт показывает, что электромагнитные волны переносят энергию. Уже это заставляет нас признать, что носителем энергии является само поле.

Из последних двух формул следует, что электрическая энергия распределена в пространстве с объемной плотностью:

$$w = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2}. \quad (52)$$

---

---

## ЛЕКЦИЯ № 6. Постоянный электрический ток

---

---

### *1. Плотность тока. Уравнение непрерывности*

**Электрический ток**, как известно, представляет собой перенос заряда через ту или иную поверхность  $S$  (например, через сечение проводника). Носителями тока в проводящей среде могут быть электроны (в металлах), ионы (в электролитах) либо другие частицы. При отсутствии электрического поля носители тока совершают хаотическое движение, и через любую воображаемую поверхность  $S$  проходит в обе стороны в среднем одинаковое число носителей того и другого знака, так что ток через поверхность  $S$  равен нулю. При включении же электрического поля на хаотическое движение носителей дополнительно накладывается упорядоченное движение с некоторой средней скоростью  $u$ , и через поверхность  $S$  появится ток. Таким образом, **электрический ток** — это, по существу, упорядоченный перенос электрических зарядов.

Количественной мерой электрического тока служит сила тока  $I$ , т. е. заряд, переносимый сквозь рассматриваемую поверхность  $S$  в единицу времени:

$$I = dQ / dt.$$

Единицей силы тока является ампер (А).

#### **Плотность тока**

Электрический ток может быть распределен по поверхности, через которую он протекает, неравномерно. Поэтому более детальной характеристики тока вводят вектор плотности тока  $\vec{j}$ . Модуль этого вектора численно равен отношению силы тока  $dI$  через элементарную площадку, расположенную в данной точке

перпендикулярно направлению движения носителей, к ее площади  $dS$ :

$$j = dl / dS.$$

За направление вектора  $\vec{j}$  принимают направление вектора скорости упорядоченного движения положительных носителей (или направление, противоположное направлению вектора скорости упорядоченного движения отрицательных носителей). Если носителями являются как положительные, так и отрицательные заряды, то плотность тока определяется формулой:

$$\vec{j} = \rho_+ \vec{u}_+ + \rho_- \vec{u}_-, \quad (53)$$

где  $\rho_+$  и  $\rho_-$  — объемные плотности положительного и отрицательного зарядов-носителей;

$\vec{u}_+, \vec{u}_-$  — скорости их упорядоченного движения. Поле вектора  $\vec{j}$  можно изобразить графически с помощью линий тока (линий вектора  $\vec{j}$ ), которые проводят так же, как и линии вектора  $\vec{E}$ .

Зная вектор плотности тока в каждой точке интересующей нас поверхности  $S$ , можно найти и силу тока через эту поверхность как поток вектора:

$$I = \int j_n dS. \quad (54)$$

Сила тока  $I$  является величиной скалярной и алгебраической. Знак определяется, кроме всего прочего, выбором направления нормали в каждой точке поверхности  $S$ , т. е. выбором направления векторов  $dS$ . При изменении направления всех векторов  $dS$  на противоположное величина  $I$  меняет знак.

#### **Уравнение непрерывности**

Представим себе в некоторой проводящей среде, где течет ток, замкнутую поверхность  $S$ . Для замкнутых поверхностей векторы нормалей, а, следовательно, и векторы  $dS$  принято брать вне по-

верхности, поэтому интеграл  $\oint j_n dS$  дает заряд, выходящий в единицу времени наружу из объема  $V$ , охватываемого поверхностью  $S$ . В силу закона сохранения заряда этот интеграл равен убыли заряда в единицу времени внутри объема  $V$ :

$$\oint j_n dS = -\frac{dq}{dt}. \quad (55)$$

Это соотношение называют **уравнением непрерывности**. Оно является выражением закона сохранения электрического заряда.

В случае стационарного (постоянного) тока распределение зарядов в пространстве должно оставаться неизменным, т. е. в правой части (55)  $dq/dt = 0$ ; следовательно, для постоянного тока:

$$\oint j_n dS = 0. \quad (56)$$

1  
Иначе говоря, линии вектора  $\vec{j}$  в этом случае нигде не начинаются и нигде не заканчиваются. Мы говорим, что в случае постоянного тока поле вектора  $\vec{j}$  не имеет источников.

## 2. Закон Ома для однородного проводника

Закон Ома, открытый экспериментально, гласит: сила тока, протекающего по однородному проводнику, пропорциональна разности потенциалов на его концах (напряжению  $U$ ):

$$I = U/R, \quad (57)$$

где  $R$  — электрическое сопротивление проводника.

Для проводника цилиндрической формы:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (58)$$

где  $l$  — длина проводника;

$S$  — площадь его поперечного сечения;

$\rho$  — удельное электрическое сопротивление.

Последнее зависит от материала проводника и его температуры. Значения удельного электрического сопротивления для наиболее хороших проводников (меди, алюминия) составляют при комнатной температуре несколько единиц на  $10^{-8}$  Ом / м.

Единицей сопротивления служит Ом. Сопротивление  $R$  зависит от формы и размеров проводника, от его материала и температуры.

#### Электрическое поле проводника с током

Если токи стационарны, то распределение электрических зарядов в проводящей среде (вообще говоря, неоднородной) не меняется во времени, хотя там и происходит движение зарядов: в каждой точке на место уходящих зарядов непрерывно поступают новые. Эти движущиеся заряды создают такое же кулоновское поле, что и неподвижные заряды той же конфигурации. Следовательно, электрическое поле стационарных токов — поле **потенциальное**.

Вместе с тем электрическое поле в случае стационарных токов существенно отличается от электростатического — кулоновского поля неподвижных зарядов. Последнее внутри проводников при равновесии зарядов равно нулю. У стационарных токов есть также кулоновское поле, однако заряды, его возбуждающие, находятся в движении. Поэтому поле  $\vec{E}$  у стационарных токов существует и внутри проводников с током.

#### Закон Ома в дифференциальной форме

Найдем связь между плотностью тока  $\rho$  и полем  $\vec{E}$  в той же точке проводящей среды. Ограничимся случаем изотропного проводника, в котором направления векторов  $\vec{E}$  и  $\rho$  совпадают. Выделим мысленно в окрестности некоторой точки проводящей среды элементарный цилиндрический объем с образующими, параллельными вектору  $\vec{j}$ , а значит, и вектору  $\vec{E}$ . Если поперечное сечение цилиндра  $dS$ , а его длина  $dl$ , то на основании (58) можно записать для такого элементарного цилиндра:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma E, \quad (59)$$

где  $\sigma$  — удельная электропроводимость среды.

Единицу измерения удельной проводимости называют Си-менсом (См).

Соотношение (59) и выражает закон Ома в дифференциальной форме. Оно не содержит дифференциалов (производных), а свое название получило потому, что в нем устанавливается связь между величинами, относящимися к одной и той же точке проводника. Иначе говоря, соотношение (59) выражает локальный закон Ома.



### 3. Обобщенный закон Ома

#### Сторонние силы

Если бы все действующие на носители тока силы сводились к силам электростатического поля, то под действием этих сил положительные носители перемещались бы из мест с большим потенциалом к местам с меньшим потенциалом, а отрицательные носители двигались бы в обратном направлении. Это вело бы к выравниванию потенциалов, и в результате все соединенные между собой проводники приобрели бы одинаковый потенциал — ток прекратился. Иными словами, при наличии лишь кулоновских сил стационарное поле должно быть полем статическим.

Чтобы этого не произошло, в цепи постоянного тока наряду с участками, где положительные носители тока движутся в сторону уменьшения потенциала  $\varphi$ , должны иметься участки, на которых перенос положительных носителей происходит в сторону возрастания  $\varphi$ , т. е. против сил электрического поля. Перенос носителей на этих участках возможен лишь с помощью сил неэлектростатического происхождения. Это так называемые сторонние силы.

Таким образом, для поддержания постоянного тока необходимы сторонние силы, действующие либо на отдельных участках цепи, либо во всей цепи. Физическая природа сторонних сил может быть весьма различной. Они могут быть обусловлены, например, химической и физической неоднородностью проводника — таковы силы, возникающие при соприкосновении разнородных проводников (гальванические элементы, аккумуляторы) или проводников различной температуры (термоэлементы) и др.

#### Обобщенный закон Ома

Для количественной характеристики сторонних сил вводят понятие поля сторонних сил и его напряженность  $\vec{E}^*$ . Этот вектор численно равен сторонней силе, действующей на единичный положительный заряд.

Теперь обратимся к плотности тока. Если под действием электрического поля  $\vec{E}$  в проводнике возникает ток плотности

$\vec{j} = \sigma E$ , то, очевидно, что под совместным действием поля  $\vec{E}$  и поля сторонних сил  $\vec{E}^*$  плотность тока:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*). \quad (60)$$

Это уравнение обобщает закон (59) на случай неоднородных участков проводящей среды. Оно выражает обобщенный закон Ома в локальной форме.

#### **Закон Ома для неоднородного участка цепи**

Закон Ома (58) справедлив для однородной цепи, т. е. такой, в которой нет никаких ЭДС и скачков потенциалов. Однако мы уже отмечали, что возникновение постоянного тока в цепи возможно лишь при наличии ЭДС. Неоднородным называют участок цепи, на котором действуют сторонние силы. Падение напряжения на сопротивлении  $R$  равно работе по перемещению единичного положительного заряда кулоновских сил и сил стороннего поля:

$$IR = \varepsilon + \varphi_A - \varphi_B.$$

Если цепь замкнутая, то  $\varphi_A = \varphi_B$  и

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}, \quad (61)$$

где  $(R + r)$  — полное сопротивление цепи, которое складывается из сопротивления  $R$  и внутреннего сопротивления источника тока  $r$ .

#### **Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа**

Расчет разветвленных цепей, например нахождение токов в отдельных ее ветвях, значительно упрощается, если пользоваться двумя правилами Кирхгофа. Первое правило Кирхгофа относится к узлам цепи, т. е. к точкам ее разветвления: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum I_k = 0. \quad (62)$$

При этом токи, идущие к узлу, и токи, исходящие из узла, следует считать величинами разных знаков, например: первые — положительными, вторые — отрицательными (или наоборот — это несущественно).

Уравнение (62) является следствием условия стационарности (58). Если бы это было не так, в узле изменялся бы заряд и токи не были бы стационарными.

Второе правило Кирхгофа относится к любому выделенному в разветвленной цепи замкнутому контуру: алгебраическая сумма произведений сил токов в отдельных участках произвольного замкнутого контура на их сопротивления равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре:

$$\sum I_k R_k = \sum \varepsilon_k. \quad (63)$$

#### **Составление системы уравнений**

Правила Кирхгофа в каждом конкретном случае позволяют написать полную систему алгебраических уравнений, из которой могут быть найдены, например, все неизвестные токи.

Уравнений (62) и (63) надо составлять столько, чтобы их число было равно числу искомых величин. При этом надо следить, чтобы одни уравнения не являлись следствием других:

- 1) если в разветвленной цепи имеется  $N$  узлов, то независимые уравнения типа (62) можно составить лишь для  $N - 1$  узлов; уравнение для последнего узла будет следствием предыдущих;
- 2) если в разветвленной цепи можно выделить несколько замкнутых контуров, то независимые уравнения типа (63) можно составить только для тех контуров, которые не получаются в результате наложения уже рассмотренных. Число независимых уравнений типа (63) оказывается равным наименьшему числу разрывов, которые следует сделать в цепи, чтобы нарушить все контуры.

При составлении уравнений типа (62) и (63) необходимо поступать так: обозначить стрелками предположительные направления токов, не задумываясь над тем, куда эти стрелки направить. Если в результате вычисления окажется, что такой-то ток положителен, то это значит, что его направление выбрано правильно.

Если же ток окажется отрицательным, его истинное направление противоположно направлению стрелки.

Выбрав произвольно замкнутый контур, все его участки следует обойти в одном направлении, например по часовой стрелке. Если предположительное направление некоторого тока совпадает с выбранным направлением обхода, то соответствующее слабое  $IR$  в уравнении (63) надо брать со знаком плюс, если же эти направления противоположны — со знаком минус. Аналогично следует поступать с ЭДС: если какая-то ЭДС повышает потенциал в направлении обхода, ее надо брать со знаком плюс, в противном случае — со знаком минус.

#### 4. Закон Джоуля—Ленца

С прохождением тока через проводник, обладающий сопротивлением, неразрывно связано выделение теплоты (нагрева проводников). Наша задача — найти количество теплоты, выделяющейся за единицу времени на определенном участке цепи. Здесь возможны два случая, которые мы и рассмотрим последовательно: однородный и неоднородный участки цепи. В основу решения этого вопроса мы возьмем закон сохранения энергии и закон Ома.

##### Однородный участок цепи

Пусть интересующий нас участок заключен между сечениями 1 и 2 проводника. Найдем работу, которую совершают силы поля над носителями тока на участке 1—2 за время  $dt$ . Если сила тока в проводнике равна  $I$ , то за время  $dt$  через каждое сечение проводника пройдет заряд  $dq = Idt$ . В частности, такой заряд  $dq$  войдет внутрь участка через сечение 1 и такой же заряд выйдет из этого участка через сечение 2. Так как распределение зарядов в проводнике остается при этом неизменным (ток постоянный), то весь процесс эквивалентен непосредственному переносу заряда  $dq$  от сечения 1 к сечению 2, имеющих потенциалы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Поэтому совершаемая при таком переносе работа сил поля:

$$dA = dq(\varphi_1 - \varphi_2) = I(\varphi_1 - \varphi_2)dt.$$

Согласно закону сохранения энергии эквивалентная этой работе энергия должна выделяться в иной форме. Если проводник неподвижен и в нем не происходят химические превращения, то

эта энергия должна выделяться в форме внутренней (тепловой) энергии, в результате чего проводник нагревается. Механизм этого превращения достаточно прост: носители тока (например, электроны в металлах) в результате работы сил поля приобретают дополнительную кинетическую энергию и затем расходуют ее на возбуждение колебаний решетки при столкновении с ее узлами-атомами.

Итак, согласно закону сохранения энергии элементарная работа  $dA = Qdt$ , где  $Q$  — теплота, выделяемая в единицу времени (тепловая мощность). Из сравнения последнего равенства с предыдущим получаем  $Q = I(\varphi_1 - \varphi_2)$ , а так как по закону Ома  $(\varphi_1 - \varphi_2) = IR$ , то:

$$Q = I^2 R. \quad (64)$$

Эта формула выражает известный закон Джоуля—Ленца.

Получим выражение этого закона в дифференциальной форме, характеризующей выделение теплоты в различных местах проводящей среды. Для этой цели выделим в данной среде элементарный объем в виде цилиндра с образующими, параллельными вектору  $\vec{j}$  — плотности тока в данном месте. Пусть поперечное сечение цилиндрика  $dS$ , а его длина  $dl$ . Тогда на основании закона Джоуля—Ленца в этом объеме за время  $dt$  выделяется количество теплоты:

$$dQ = I^2 R dt = \frac{c dl}{dS} (jdS)^2 dt = \rho j^2 dV dt,$$

где  $dV = dS dl$  — объем цилиндра.

Разделив последнее уравнение на  $dV dt$ , получим формулу, которая определяет количество теплоты, выделяющейся за единицу времени в единице объема проводящей среды, — удельную тепловую мощность тока:

$$Q_{уд} = \rho j^2. \quad (65)$$

Эта формула выражает закон Джоуля—Ленца в локальной форме: удельная тепловая мощность тока пропорциональна квадрату плотности электрического тока и удельному сопротивлению среды в данной точке.

Уравнение (65) представляет собой наиболее общую форму закона Джоуля—Ленца, применимую к любым проводникам вне зависимости их формы, однородности и от природы сил, возбуждающих электрический ток.

#### Неоднородный участок цепи

Если участок цепи содержит источник ЭДС, то на носители тока будут действовать не только электрические силы, но и сторонние. В этом случае выделяемое в неподвижном проводнике тепло будет равно алгебраической сумме работ электрических и сторонних сил (по закону сохранения энергии). Это относится и к соответствующим мощностям: тепловая мощность должна быть равна алгебраической сумме мощностей электрических и сторонних сил. Проще всего в этом можно убедиться, умножив выражение (65) на  $I$ .

$$I^2 R = (\varphi_1 - \varphi_2)I + \varepsilon I. \quad (66)$$

Слева здесь — выделяющаяся на участке тепловая мощность  $Q$ . При наличии сторонних сил величина  $Q$  определяется той же формулой (64), что и для однородного участка цепи. Последнее же слагаемое справа представляет собой мощность, развиваемую сторонними силами на данном участке. Заметим еще, что последняя величина является алгебраической: в отличие от  $I^2 R$  она изменяет знак при изменении направления тока  $I$ .

Таким образом, уравнение (66) означает, что тепловая мощность, выделяемая на участке цепи между точками 1 и 2, равна алгебраической сумме мощностей электрических и сторонних сил. Сумму этих мощностей, т. е. правую часть (66), называют **мощностью тока** на рассматриваемом участке цепи. Тогда можно сказать, что в случае неподвижного участка цепи мощность выделяемой на этом участке теплоты равна мощности тока. Применив (66) ко всей неразветвленной цепи, получим:

$$Q = \varepsilon I, \quad (67)$$

т. е. общее количество выделяемой за единицу времени во всей цепи джоулевой теплоты равно мощности только сторонних сил.

---

---

## ЛЕКЦИЯ № 7. Магнитное поле в вакууме

---

---

### *1. Сила Лоренца. Вектор индукции магнитного поля*

#### **Вектор магнитной индукции**

Подобно тому как в пространстве, окружающем электрические заряды, возникает электростатическое поле с определенными физическими свойствами, так и в пространстве, окружающем ток, возникает особого рода поле, называемое магнитным полем. Магнитное поле обнаруживается по действию сил на внесенные в него проводники, по которым течет ток. Для изучения свойств магнитного поля воспользуемся его действием на замкнутый плоский контур с током. Такой контур будем называть рамкой. Размеры этого контура должны быть малыми по сравнению с расстоянием до тех проводников, по которым текут токи, образующие магнитное поле.

Опыт показывает, что такая малая рамка, помещенная около проводов, по которым текут токи, поворачивается определенным образом. Магнитное поле оказывает на рамку ориентирующее действие.

Ориентирующее действие поля на рамку можно прежде всего использовать для характеристики направленности магнитного поля. Для этого проведем нормаль к плоскости рамки. За положительное направление нормали примем такое, чтобы ток в рамке при рассмотрении с конца нормали казался идущим против часовой стрелки.

За направление магнитного поля в месте расположения рамки принимается то направление, вдоль которого расположится положительная нормаль к рамке.

Тот факт, что рамка испытывает ориентирующее действие поля, указывает, что на рамку в магнитном поле действует пара сил. Величина этой пары сил может быть измерена по тому, насколько надо закрутить нить, к которой подвешена рамка, чтобы удержать рамку в данном положении. Опыт показывает, что величина момента  $M$  этой пары зависит как от свойств самой рамки (ее раз-

меров, ориентации и силы тока в ней), так и от токов, образующих магнитное поле (их силы, размеров и формы).

Момент сил достигает наибольшего значения, когда нормаль к рамке ориентирована перпендикулярно к направлению поля. Этот момент, как показывает опыт, пропорционален силе тока в рамке и площади рамки и не зависит от ее формы. Таким образом,  $M \sim IS$ .

Величина, равная произведению силы тока в рамке на ее площадь, называется магнитным моментом рамки:

$$p_m = IS. (68)$$

**Магнитный момент рамки** — векторная величина. Его направление совпадает с направлением положительной нормали к рамке.

$B \sim M / IS$  принимается за величину характеристики магнитного поля, которая называется магнитной индукцией магнитного поля. Векторная характеристика поля: направление вектора  $B$  в каждой данной точке магнитного поля определяется направлением положительной нормали к рамке с током, принимающей положение устойчивого равновесия в магнитном поле. Величина магнитной индукции определяется по равенству (68) моментом пары сил, действующих на рамку, при условии, что нормаль к рамке расположена перпендикулярно направлению вектора  $B$ .

#### **Графическое изображение магнитной индукции**

Аналогично тому, как в электростатике мы рассматривали графический метод характеристики электростатического поля с помощью линий напряженности, так и для характеристики магнитного поля мы введем в рассмотрение линии магнитной индукции. За линию магнитной индукции примем такую линию, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора  $B$  в этой точке.

#### **Сила Лоренца**

Опыт показывает, что сила, действующая на точечный заряд  $q$ , зависит в общем случае не только от положения этого заряда, но и от его скорости. Соответственно этому силу  $F$  разделяют на две составляющие — электрическую  $\vec{F}_E$  (она не зависит от движения за



ряда) и магнитную  $\vec{F}_B$  (она зависит от скорости заряда). В любой точке пространства направление и модуль магнитной силы зависят от скорости заряда, причем эта сила всегда перпендикулярна вектору  $\vec{v}$ . Кроме того, в любом месте магнитная сила перпендикулярна определенному в данном месте направлению; и, наконец, ее модуль пропорционален составляющей скорости, которая перпендикулярна этому выделенному направлению.

Тогда полная электромагнитная сила, действующая на заряд  $q$ :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}B]. \quad (69)$$

Ее называют **силой Лоренца**. Последнее выражение является универсальным: оно справедливо как для постоянных, так и для переменных электрических и магнитных полей, причем при любых значениях скорости  $\vec{v}$  заряда.

Важной особенностью магнитной силы является то, что она всегда перпендикулярна вектору скорости заряда.

#### **Магнитное поле равномерно движущегося заряда**

Опыт показывает, что само магнитное поле порождается движущимися зарядами (токами). В результате обобщения экспериментальных данных был получен элементарный закон, определяющий поле  $B$  точечного заряда  $q$ , движущегося с постоянной нерелятивистской скоростью  $\vec{v}$ . Этот закон записывается в виде:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v}\vec{r}]}{r^2}, \quad (70)$$

где  $\mu_0$  — магнитная постоянная;

$\vec{r}$  — радиус-вектор, проведенный от заряда  $q$  к точке наблюдения.

Конец радиуса-вектора  $\vec{r}$  неподвижен в данной системе отсчета, а его начало движется со скоростью  $\vec{v}$ , поэтому вектор  $B$  в данной системе отсчета зависит не только от положения точки наблюдения, но и от времени.

В соответствии с формулой (70) вектор  $B$  направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$ , причем вращение вокруг вектора  $\vec{n}$  в направлении вектора  $B$  образует с направлением правовинтовую систему.

## 2. Закон Био—Савара

### Принцип суперпозиции

Опыт показывает, что для магнитного поля, как и для электрического, справедлив принцип суперпозиции: магнитное поле, создаваемое несколькими движущимися зарядами или токами, равно векторной сумме магнитных полей, создаваемых каждым зарядом или током в отдельности:

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i. \quad (71)$$

### Закон Био—Савара

Рассмотрим вопрос о нахождении магнитного поля, создаваемого постоянными электрическими токами. Био и Савар исследовали экспериментально магнитные поля токов различной формы. Лапласу удалось найти путем обобщения опытных данных такой элементарный закон, который, будучи примененным к участкам контуров произвольной формы, дает во всех случаях правильное значение результирующей индукции поля. Этот закон принято называть законом Био—Савара—Лапласа. Его содержание следующее: элемент контура  $dl$ , по которому течет ток силой  $I$ , создает в произвольно выбранной точке магнитное поле с индукцией  $d\vec{B}$ , равной:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}\vec{r}]}{r^3}. \quad (72)$$

Элементу длины провода  $dl$  приписывается направление, совпадающее с направлением тока. Радиус-вектор  $\vec{r}$  проводится от элемента проводника с током  $d\vec{l}$  к точке  $A$ , в которой вычисляется поле. Практически направление вектора  $d\vec{B}$  определяется правилом буравчика: направление вращения головки буравчика дает направление  $d\vec{B}$ , если поступательное движение буравчика соответствует направлению тока в элементе контура  $dl$ .

## 3. Основные законы магнитного поля

Магнитное поле обладает, как и электрическое поле, двумя важнейшими свойствами. Эти свойства, связанные также с пото-

ком и циркуляцией векторного поля, и выражают основные законы магнитного поля.

Обратимся к основным законам магнитного поля — теореме Гаусса и теореме о циркуляции.

#### **Теорема Гаусса для поля $\mathbf{B}$**

Поток вектора  $\mathbf{B}$  сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (73)$$

Эта теорема выражает собой тот экспериментальный факт, что линии вектора  $\mathbf{B}$  замкнуты. Поэтому число линий вектора  $\mathbf{B}$ , выходящих из любого объема, ограниченного замкнутой поверхностью  $S$ , всегда равно числу линий, входящих в этот объем.

Отсюда вытекает важное следствие, которым мы будем пользоваться в дальнейшем неоднократно. А именно: поток вектора  $\mathbf{B}$  сквозь поверхность  $S$ , ограниченную некоторым замкнутым контуром, не зависит от формы поверхности  $S$ . Это легко понять с помощью представления о линиях вектора  $\mathbf{B}$ : так как они нигде не прерываются, их число сквозь поверхность  $S$ , ограниченную данным контуром (т. е. поток вектора  $\mathbf{B}$ ), действительно не должно зависеть от формы поверхности  $S$ .

Закон (3.9) выражает также и тот факт, что в природе нет магнитных зарядов, на которых начинались или заканчивались бы линии вектора  $\mathbf{B}$ . Иначе говоря, магнитное поле не имеет источников в противоположность полю электрическому.

#### **Теорема о циркуляции вектора $\mathbf{B}$**

Циркуляция вектора  $\mathbf{B}$  по произвольному контуру  $\Gamma$  равна произведению  $\mu_0$  на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром  $\Gamma$ :

$$\int \mathbf{B}_i dl = \mu_0 \sum I_i. \quad (74)$$

Ток считается положительным, если его направление связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта. Ток

противоположного направления считается отрицательным. Теорема о циркуляции (74) может быть доказана исходя из закона Био—Савара. В общем случае произвольных токов это доказательство достаточно кропотливо, и мы не будем приводить его здесь. Мы будем рассматривать утверждение (74) как постулат, подтвержденный экспериментально.

Тот факт, что циркуляция вектора  $B$ , вообще говоря, не равна нулю, означает, что поле  $B$  не потенциально (в отличие от электростатического поля). Такое поле называют вихревым, или соленоидальным.

Так как циркуляция вектора  $B$  пропорциональна току  $I$ , охватываемому контуром, то магнитному полю в общем случае нельзя приписать скалярный потенциал. Этот потенциал был бы неоднозначным при каждом обходе по контуру и при возвращении в исходную точку получал бы приращение, равное  $\mu_0 I$ .

#### **Закон Ампера**

На всякий проводник с током, помещенный в магнитное поле, действует механическая сила. В общем случае элемент тока  $I dl$ , расположенного под некоторым углом к линиям индукции  $B$ , выражен для величины механической силы  $dF$  и выводится из закона Ампера:

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \times \vec{B}]. \quad (75)$$

Направление вектора  $dF$  может быть найдено по общим правилам векторного произведения. Практически удобно для нахождения направления этого вектора использовать правило левой руки: если направить указательный палец по полю, а средний — по направлению тока, то отогнутый большой палец левой руки будет указывать направление силы, действующей на ток.

Интегрируя это выражение по элементам тока (объемным линейным), можно найти магнитную силу, действующую на тот или иной объем проводника или его линейный участок.

Силы, действующие на токи в магнитном поле, называют амперовыми, или силами Ампера.

#### **4. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле**

При перемещении проводника с током магнитное поле производит работу. Для вычисления этой работы рассмотрим линейный проводник длиной  $l$  с током  $I$ , перемещающийся в однородном магнитном поле  $B$ . На перемычку действует сила Ампера  $F = IlB$ . При перемещении перемычки вправо на  $dx$  эта сила совершает положительную работу:

$$dA = Fdx = IBldx = IBdS, \quad (76)$$

где  $dS$  — приращение площади, ограниченной контуром;  
 $BdS = d\Phi$ , и следовательно,

$$dA = Id\Phi, \quad (77)$$

т. е. работа, совершаемая проводником с током при перемещении его в магнитном поле, численно равна произведению тока  $I$  на магнитный поток  $d\Phi$ , пересеченный движущимся проводником.

Полученный результат можно применить для подсчета работы перемещения замкнутого контура с током в магнитном поле. Для этого, очевидно, надо мысленно разбить контур на отдельные участки и просуммировать работы сил, приложенных к этим участкам. Тогда получим:

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1). \quad (78)$$

Разность равна изменению потока магнитной индукции через площадь, ограниченную контуром с током в начальном и конечном положениях контура.

#### **5. Магнитное поле в веществе**

##### **Поле в магнетике**

Если в магнитное поле, которое образовано токами в проводах, ввести то или иное вещество, то поле изменится. Это можно

объяснить тем, что всякое вещество является магнетиком, т. е. способно под действием магнитного поля намагничиваться — приобретать магнитный момент. Намагниченное вещество создает свое магнитное поле  $B'$ , которое вместе с первичным полем  $B_0$ , обусловленным токами проводимости, образует результирующее поле:

$$\bar{B} = \bar{B}_0 + \bar{B}'. \quad (79)$$

Поле  $B'$ , как и поле  $B_0$  токов проводимости, не имеет источников (магнитных зарядов), поэтому для результирующего поля  $B$  при наличии магнетика справедлива теорема Гаусса:

$$\oint \bar{B} d\bar{S} = 0.$$

Это означает, что линии вектора  $B$  и при наличии вещества остаются всюду непрерывными.

#### **Механизм намагничивания**

В настоящее время установлено, что молекулы многих веществ обладают собственным магнитным моментом. Этот момент обусловлен внутренним движением зарядов.

Каждому магнитному моменту соответствует элементарный круговой ток, который создает в окружающем пространстве магнитное поле. При отсутствии этого поля магнитные моменты молекул ориентированы беспорядочно. Поэтому результирующее магнитное поле, обусловленное ими, равно нулю. Также равен нулю и суммарный магнитный момент вещества.

Если вещество поместить во внешнее магнитное поле, то под действием этого поля магнитные моменты молекул приобретают преимущественную ориентацию в одном направлении. Вещество намагничивается, т. е. его суммарный магнитный момент становится не равным нулю. При этом возникает поле  $B'$ , потому что магнитные поля отдельных молекул уже не компенсируют друг друга.

По-другому происходит намагничивание веществ, молекулы которых при отсутствии внешнего поля не имеют магнитного

момента. Если внести такие вещества во внешнее поле, то происходит индуцирование элементарных круговых токов в молекулах, и молекулы (вместе с ними и все вещество) приобретают магнитный момент. Это также приводит к возникновению поля  $B'$ .

Вещества обладают разными магнитными свойствами. Большинство из них при внесении в магнитное поле намагничивается слабо, а ферромагнитные вещества (кобальт, железо, никель и др.) обладают сильными магнитными свойствами.

#### **Намагниченность**

Степень намагничивания магнетика характеризуют магнитным моментом единицы объема. Эту величину называют намагниченностью и обозначают  $J$ . По определению:

$$\bar{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum \bar{p}_m, \quad (80)$$

где  $\Delta V$  — физически бесконечно малый объем в окрестности данной точки;

$p_m$  — магнитный момент отдельной молекулы.

Суммирование проводится по всем молекулам в объеме  $\Delta V$ . Намагниченность можно представить как

$$\bar{J} = n \langle p_m \rangle, \quad (81)$$

где  $n$  — концентрация молекул;

$\langle p_m \rangle$  — средний магнитный момент одной молекулы.

Из последней формулы видно, что вектор  $J$  сонаправлен именно со средним вектором  $\langle p_m \rangle$ , поэтому в дальнейшем достаточно знать поведение вектора  $\langle p_m \rangle$  и представлять себе все молекулы в пределах объема  $\Delta V$  имеющими одинаковый магнитный момент  $p_m$ . Если во всех точках вещества вектор  $J$  одинаков, говорят, что вещество намагничено однородно.

**Теорема о циркуляции вектора  $H$  (для магнитного поля постоянных токов).**

В магнетиках, помещенных во внешнее магнитное поле, возникают токи намагничивания, поэтому циркуляция вектора  $B$  те-

перь будет определяться не только токами проводимости, но и токами намагничивания, а именно:

$$\oint B_l dl = \mu_0(I + I'), \quad (82)$$

где  $I$  и  $I'$  — токи проводимости и намагничивания, охватываемые заданным контуром  $\Gamma$ .

Ввиду того, что определение токов  $I'$  в общем случае задача сложная, то формула (82) становится малоприменимой в практическом отношении. Оказывается, однако, можно найти некоторый вспомогательный вектор, циркуляция которого будет определяться только токами проводимости, охватываемыми контуром  $\Gamma$ . Действительно, мы уже знаем, что с током  $I'$  связана циркуляция намагниченности:

$$\int J_l dl = I'. \quad (83)$$

Предполагая, что циркуляция векторов  $B$  и  $J$  берется по одному и тому же контуру  $\Gamma$ , выразим  $I'$  в уравнении (83) по формуле (84), тогда

$$\int \left( \frac{\bar{B}}{\mu_0} - J \right)_l dl = I. \quad (84)$$

Величину, стоящую под интегралом в скобках, обозначают буквой  $H$  и называют напряженностью магнитного поля. Таким образом, циркуляция вектора  $H$  по произвольному замкнутому контуру  $\Gamma$  равна алгебраической сумме токов проводимости  $I$ , охватываемых контуром (теорема о циркуляции вектора  $H$ ).

#### **Связь между векторами $J$ и $H$**

Намагниченность  $J$  зависит магнитной индукции  $B$  в данной точке вещества. Однако  $J$  связывают не с  $B$ , а с  $H$ . Мы ограничимся пока рассмотрением только таких магнетиков, для которых зависимость между  $J$  и  $H$  имеет линейный характер, а именно:

$$\bar{J} = \chi \bar{H}, \quad (85)$$



где  $\chi$  — магнитная восприимчивость, безразмерная величина, характеристика каждого данного магнетика.

Магнитная восприимчивость  $\chi$  бывает как положительной, так и отрицательной. Соответственно магнетики разделяются на парамагнетики ( $\chi > 0$ ) и диамагнетики ( $\chi < 0$ ). У парамагнетиков  $\bar{J} \uparrow \uparrow \bar{H}$ , у диамагнетиков  $\bar{J} \uparrow \downarrow \bar{H}$ . Заметим, что, кроме этих магнетиков, существуют ферромагнетики, у которых зависимость  $J(H)$  имеет весьма сложный характер и является нелинейной.

#### **Связь между $B$ и $H$**

Для магнетиков, которые подчиняются зависимости (85), выражение для  $H$  принимает вид  $(1 + \chi)H = \frac{B}{\mu_0}$ . Отсюда

$$\bar{B} = \mu\mu_0\bar{H}, \quad (86)$$

где  $\mu$  — магнитная проницаемость среды,

$$\mu = 1 + \chi. \quad (87)$$

У парамагнетиков  $\mu > 1$ , у диамагнетиков  $\mu < 1$ , причем как у тех, так и у других  $\mu$  отличается от единицы весьма мало, т. е. магнитные свойства этих магнетиков выражены очень слабо.

#### **Ферромагнетики**

В магнитном отношении все вещества можно разделить на слабомагнитные (парамагнетики и диамагнетики) и сильномагнитные (ферромагнетики). Пара- и диамагнетики при отсутствии магнитного поля, как мы знаем, не намагничены и характеризуются однозначной зависимостью намагниченности  $J$  от  $H$ .

Ферромагнетиками называют вещества (твердые), которые могут обладать спонтанной намагниченностью, т. е. намагничены уже при отсутствии внешнего магнитного поля. Типичные представители ферромагнетиков — это железо, кобальт и многие их сплавы.

#### **Основная кривая намагничивания**

Характерной особенностью ферромагнетиков является сложная нелинейная зависимость  $J(H)$  или  $B(H)$ . Уже при сравнительно небольших значениях  $H$  намагниченность  $J$  достигает насыще-

ния  $I_{нас}$ . Магнитная индукция  $B$  также растет с увеличением  $H$ , а после достижения состояния насыщения  $B$  продолжает расти с увеличением  $H$  по линейному закону:  $B = \mu_0 H + \text{const}$ , где  $\text{const} = \mu_0 I_{нас}$ .

Ввиду нелинейной зависимости  $B(H)$  для ферромагнетиков нельзя ввести магнитную проницаемость как определенную постоянную величину, характеризующую магнитные свойства каждого данного ферромагнетика.

#### **О теории ферромагнетизма**

Физическую природу ферромагнетизма удалось понять только с помощью квантовой механики. При определенных условиях в кристаллах могут возникать так называемые **обменные силы**. Эти силы заставляют магнитные моменты электронов устанавливаться параллельно друг другу. В результате возникают области (размером 1—10 мкм) спонтанного, т.е. самопроизвольного, намагничивания, эти области называют доменами. В пределах каждого домена ферромагнетик намагничен до насыщения и имеет определенный магнитный момент. Направления этих моментов для разных доменов различны, поэтому при отсутствии внешнего поля суммарный момент образца равен нулю и образец в целом представляется макроскопически ненамагниченным.

При включении внешнего магнитного поля домены, ориентированные по полю, растут за счет доменов, ориентированных против поля. Такой рост в слабых полях имеет обратимый характер. В более сильных полях происходит одновременная переориентация магнитных моментов в пределах всего домена. Этот процесс является необратимым, что и служит причиной гистерезиса и остаточного намагничивания.

---

---

## ЛЕКЦИЯ № 8. Электромагнитная индукция

---

---

### *1. Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца*

#### **Открытие Фарадея**

В 1831 г. Фарадеем было сделано одно из наиболее фундаментальных открытий в электродинамике — явление электромагнитной индукции. Оно заключается в том, что в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока (т.е. потока вектора  $B$ ), охватываемого этим контуром, возникает электрический ток — его назвали индукционным.

Появление индукционного тока означает, что при изменении магнитного потока в контуре возникает ЭДС индукции  $\varepsilon_i$ . При этом весьма замечателен тот факт, что  $\varepsilon_i$  совершенно не зависит от того, каким образом осуществляется изменение магнитного потока  $\Phi$ , и определяется лишь скоростью его изменения, т.е. ве-

личной  $\frac{d\Phi}{dt}$ :

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (88)$$

Это соотношение носит название закона Фарадея. В равенстве (88) справа стоит производная от потока индукции  $\Phi$  через контур по времени. Это значит, что численному значению ЭДС индукции пропорциональна скорость изменения потока индукции со временем. Остается выяснить смысл знака минус, стоящего в правой части закона Фарадея. Для этого примем произвольное направление обхода контура за положительное. Направление тока будем считать положительным, если оно совпадает с положительным направлением обхода контура. Также ЭДС будем считать положительной, если она создает в цепи падение потенциала в направлении положительного обхода. Проведем к плоскости

контура положительную нормаль. Положительный поток индукции через площадь контура создадут линии индукции, идущие параллельно нормали или составляющие с ней острый угол. Отрицательный поток индукции через площадь контура создадут линии индукции, направленные в сторону, обратную нормали, или составляющие с ней тупой угол. Тогда знак минус в правой части равенства (88) указывает на то, что увеличение потока индукции ( $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ ) вызывает ЭДС, действующую в направлении отрицательного обхода контура; уменьшение потока индукции ( $\frac{d\Phi}{dt} < 0$ ) вызывает ЭДС, действующую в направлении положительного обхода контура. Таким образом, выражение (88) дает одновременно и величину, и направление ЭДС индукции. Это направление определяется правилом Ленца.

#### **Правило Ленца**

Направление индукционного тока (а значит, и знак ЭДС индукции) определяется правилом Ленца: индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей. Иначе говоря, индукционный ток создает магнитный поток, препятствующий изменению магнитного потока, вызывающего ЭДС индукции.

Правило Ленца выражает существенный физический факт — стремление системы противодействовать изменению ее состояния (электромагнитная инерция).

Единицей магнитного потока является вебер (Вб). При скорости изменения магнитного потока 1 Вб/с в контуре индуцируется ЭДС, равная 1 В.

## **2. Явление самоиндукции**

Электромагнитная индукция возникает во всех случаях, когда изменяется магнитный поток, проходящий сквозь контур. При этом совершенно не важно, чем вызывается это изменение потока. Если в некотором контуре течет изменяющийся во времени ток, то магнитное поле этого тока также будет изменяться. Это влечет за собой изменение магнитного потока через контур, а следовательно, и появление ЭДС индукции.

Таким образом, изменение тока в контуре ведет к возникновению ЭДС индукции в этом же самом контуре. Данное явление называется самоиндукцией.

### Индуктивность

Если в пространстве, где находится контур с током  $I$ , нет ферромагнетиков, поле  $B$ , а значит, и полный магнитный поток  $\Phi$  через контур будут пропорциональны силе тока  $I$ , и можно написать, что

$$\Phi = LI, \quad (89)$$

где  $L$  — коэффициент, называемый индуктивностью контура.

В соответствии с принятым правилом знаков для величин  $\Phi$  и  $I$  оказывается, что как  $\Phi$ , так и  $I$  всегда имеют одинаковые знаки. Это означает, что индуктивность  $L$  — величина положительная.

Индуктивность  $L$  зависит от формы и размеров контура, а также от магнитных свойств окружающей среды. Если контур жесткий и поблизости от него нет ферромагнетиков, индуктивность является величиной постоянной, не зависящей от силы тока  $I$ .

Единицей индуктивности является генри (Гн). Согласно (89) индуктивностью 1 Гн обладает контур, магнитный поток через который при токе 1 А равен 1 Вб, значит 1 Гн = 1 Вб/А.

### ЭДС самоиндукции

При изменении силы тока в контуре согласно (88) возникает ЭДС самоиндукции:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (L\text{-const}). \quad (90)$$

Если при изменении тока индуктивность  $L$  остается постоянной (не меняется конфигурация контура и нет ферромагнетиков), то:

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}, \quad L - \text{const}. \quad (91)$$

Здесь знак минус показывает, что ЭДС самоиндукции всегда направлена так, чтобы препятствовать изменению силы тока в соответствии с правилом Ленца. Эта ЭДС стремится сохранить ток неизменным: она противодействует току, когда он увеличивается, и поддерживает ток, когда он уменьшается. В явлениях самоиндукции ток обладает «инерцией», потому что эффекты индукции стремятся сохранить магнитный поток постоянным, точно так

же, как механическая инерция стремится сохранить скорость тела неизменной.

Характерные проявления самоиндукции наблюдаются при замыкании и размыкании тока в цепи.

*Пример 1*

Исчезновение тока при размыкании цепи.

Предположим, что в некотором контуре первоначально существовала ЭДС  $\varepsilon_0$ , которая поддерживала в нем силу тока  $I_0$ . Затем в момент времени, для которого мы примем  $t = 0$ , эта ЭДС выключается, но контур остается замкнутым, причем полное сопротивление его равно  $R$ . Тогда в контуре ток прекратится не сразу, а будет продолжать еще идти некоторое время за счет ЭДС самоиндукции. Сила тока самоиндукции определяется законом Ома:

$$I = -\frac{L}{R} \frac{dI}{dt}.$$

Это равенство можно переписать в виде:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt, \quad (92)$$

что представляет собой дифференциальное уравнение, определяющее зависимость силы тока самоиндукции  $I$  от времени.

Интегрируя правую и левую части уравнения (92), получим:

$$\ln I = -\frac{R}{L} t + \ln C, \quad (93)$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

Значение этой произвольной постоянной получим из условия, что при  $t = 0$  и  $I = I_0$ , откуда по (93)

$$\ln I_0 = C.$$

Таким образом, выражение (93) принимает вид:

$$I = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}. \quad (94)$$

Это соотношение показывает, что сила тока при выключении ЭДС спадает по экспоненциальному закону, при этом спадает тем медленнее, чем больше самоиндукция  $L$  и чем меньше сопротивление  $R$ .

Время  $t_0$ , в течение которого сила тока размыкания спадает до половины своей первоначальной величины, определится из соотношения (94), если в нем положить  $I = I_0 / 2$ , откуда:

$$t_0 = (\ln 2) \frac{R}{L}. \quad (95)$$

### Пример 2

Ток при замыкании цепи

Будем считать, что в контур заданного сопротивления  $R$  включается сторонняя ЭДС  $\varepsilon_0$ . Тогда благодаря явлению самоиндукции полная ЭДС в контуре будет:

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_{si} = \varepsilon_0 - L \frac{dI}{dt}, \quad (96)$$

откуда сила тока в контуре  $I$  окажется равной:

$$I = \frac{\varepsilon_0 - L \frac{dI}{dt}}{R}. \quad (97)$$

Замечая, что величина численно равна силе тока, который протекал бы по контуру при отсутствии явления самоиндукции, перепишем последнее выражение в виде:

$$\frac{d(I_0 - I)}{I_0 - I} = -\frac{R}{L} dt.$$

Интегрируя обе части этого выражения, получим:

$$\ln(I_0 - I) = -\frac{R}{L} t + \ln C_1. \quad (98)$$

Произвольную постоянную  $C_1$  определим из условия, что  $I = 0$  при  $t = 0$ , откуда  $\ln C_1 = \ln I_0$ , и выражение (98) принимает вид:

$$I = I_0(1 - e^{-\frac{R}{L}t}). \quad (99)$$

Это выражение показывает, что при включении ЭДС ток в цепи не сразу достигает значения  $I_0$ , но достигает его постепенно и тем медленнее, чем больше индуктивность  $L$  и чем меньше сопротивление  $R$ .

Существование токов размыкания позволило обнаружить явление сверхпроводимости. При сверхпроводимости  $R = 0$  и ток будет продолжаться в контуре сколь угодно долго, не ослабевая. Опыты Каммерлинг—Оннеса, приведшие к открытию сверхпроводимости, проводились следующим образом: соленоид, концы которого были соединены друг с другом, помещался между полюсами электромагнита, после чего он охлаждался жидким гелием до температуры, при которой материал его провода становился сверхпроводящим. Затем магнитное поле электромагнита выключалось. При этом в соленоиде возникал индукционный ток. При обычных условиях он прекратился бы через весьма малый промежуток времени, но при наличии сверхпроводимости он продолжал идти по соленоиду в течение многих часов, не обнаруживая заметного ослабления.

### 3. Энергия магнитного поля

#### Магнитная энергия тока

Замкнем неподвижную цепь, содержащую индуктивность  $L$  и сопротивление  $R$ , на источник тока с ЭДС  $\varepsilon_0$ . В контуре начнет возрастать ток. Это приводит к появлению ЭДС самоиндукции. Согласно закону Ома:

$$\varepsilon_0 = RI - \varepsilon_S. \quad (100)$$

Найдем элементарную работу, которую совершают сторонние силы за время  $dt$ . Для этого умножим предыдущее равенство на  $Idt$ :

$$\varepsilon_0 Idt = RI^2 dt - \varepsilon_S Idt. \quad (101)$$



Отсюда:

$$dA_{\text{сноп}} = dQ + Id\Phi. (102)$$

Мы видим, что в процессе установления тока, когда поток  $\Phi$  меняется и  $d\Phi > 0$  (если  $I > 0$ ), работа, которую совершает источник, оказывается больше выделяемой в цепи джоулевой теплоты. Часть этой работы (дополнительная работа) совершается против ЭДС самоиндукции. Заметим, что после того, как ток установится,  $d\Phi = 0$  и вся работа источника будет идти только на выделение джоулевой теплоты.

Итак, дополнительная работа, совершаемая сторонними силами против ЭДС самоиндукции в процессе установления тока:

$$dA^{\text{дон}} = Id\Phi. (102)$$

Это соотношение имеет общий характер. Оно справедливо и при наличии ферромагнетиков, так как при его выводе не вводилось никаких предположений относительно магнитных свойств окружающей среды.

Теперь (и далее) будем считать, что ферромагнетики отсутствуют. Тогда

$$dA^{\text{дон}} = ILdl. (103)$$

По закону сохранения энергии любая работа идет на приращение какого-то вида энергии. Мы видим, что часть работы сторонних сил идет на увеличение внутренней энергии проводников (с ней связано выделение джоулевой теплоты) и другая часть — в процессе установления тока — на что-то еще. Это «что-то» есть не что иное, как магнитное поле, именно его появление и связано с появлением тока.

Таким образом, мы приходим к выводу, что при отсутствии ферромагнетиков контур с индуктивностью  $L$ , по которому течет ток  $I$ , обладает энергией:

$$W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} I\Phi = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{2I}. (104)$$

Эту энергию называют **магнитной энергией тока**, или **собственной энергией тока**.

#### Энергия магнитного поля

Формула (104) выражает магнитную энергию тока через индуктивность и ток (при отсутствии ферромагнетиков). Однако и здесь, как и в случае электрической энергии заряженных тел, энергию можно выразить непосредственно через магнитную индукцию  $B$ . Убедимся, что это так, сначала на простейшем примере длинного соленоида, пренебрегая искажением поля на его торцах (краевыми эффектами). Подстановка в формулу (104) выражения  $L = \mu\mu_0 n^2 V$  дает:

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 n^2 I^2 V}{2}. \quad (105)$$

А, так как  $nI = H = B / \mu\mu_0$ , то

$$W = \frac{B^2 V}{2\mu\mu_0} = \frac{(BH)V}{2}. \quad (106)$$

Эта формула справедлива для однородного поля, заполняющего объем  $V$  (как в нашем случае с соленоидом).

Отсюда, как и в случае электрического поля, мы приходим к выводу, что магнитная энергия также локализована в пространстве, занимаемом магнитным полем. Магнитная энергия распределена в пространстве с объемной плотностью:

$$w = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \quad (107)$$

---

---

## ЛЕКЦИЯ № 9. Квантовая механика

---

---

### 1. Физические основы квантовой механики

Квантовая механика, как и всякая физическая теория, возникла в тесной связи с развитием новой области экспериментальных исследований. Эти исследования, начавшиеся с изучения свойств излучения черного тела, в начале XX века быстро распространились на явления фотоэффекта, а затем на атомные системы. Трудности, стоявшие на пути развития квантовой механики, были связаны с тем, что свойства частиц, из которых построены атомные системы, кардинальным образом отличаются от свойств макроскопических тел. Законы классической механики и электродинамики оказались непригодными для описания поведения отдельных молекул и атомов, а также элементарных частиц — электронов, протонов, нейтронов и т. д. В дальнейшем элементарные частицы, а иногда отдельные атомы и молекулы мы будем объединять термином «микрочастицы». Как мы увидим, отличительной особенностью микрочастиц является то, что их движение не подчиняется законам классической механики. Так, было установлено, что основная величина, характеризующая состояние отдельных атомов и молекул — их энергия, имеет дискретный ряд значений.

Прямое доказательство дискретности состояния атомных систем было получено в опытах *Г. Герца* и *Дж. Франка* (1913 г.). С помощью установки, изображенной на рисунке 18, Дж. Франк и Г. Герц бомбардировали пары различных элементов электронами известной энергии.

Между сеткой и собирающим анодом поддерживалась небольшая разность потенциалов  $V_0$ , при этом ток  $i$  через гальванометр создавался только теми электронами, энергия которых была больше определенного минимального значения. По мере роста ускоряющего потенциала  $V$  увеличивалось число электронов, достигающих анода, и возрастал ток  $i$ . Если при столкновении электрона с одним из атомов элемента, находящегося в парообразном со-

стоянии, кинетическая энергия электрона сохраняется, то после столкновения электрон просто меняет свое начальное направление. Так как атом намного тяжелее электрона, то при столкновении кинетическая энергия электрона практически не изменяется. Однако, как только энергия электрона достигнет некоторой критической величины, анодный ток резко уменьшается. Этот эффект можно объяснить тем, что при столкновении с атомом электрон отдает часть или всю свою кинетическую энергию атому, в результате чего атом возбуждается и переходит из основного состояния в одно из возбужденных энергетических состояний. Такое столкновение называется **неупругим** в противоположность **упругому** столкновению, при котором кинетическая энергия сохраняется. Критическая энергия электрона соответствует энергии возбуждения атома. При дальнейшем росте ускоряющего потенциала  $V$  анодный ток снова увеличивается, так как теперь электроны, испытавшие неупругие столкновения, имеют энергию, достаточную для того, чтобы достичь анода. Далее наблюдается следующее резкое уменьшение анодного тока  $i$ , которое можно связать с возбуждением более высокого энергетического уровня. Таким образом, получается последовательность критических потенциалов.

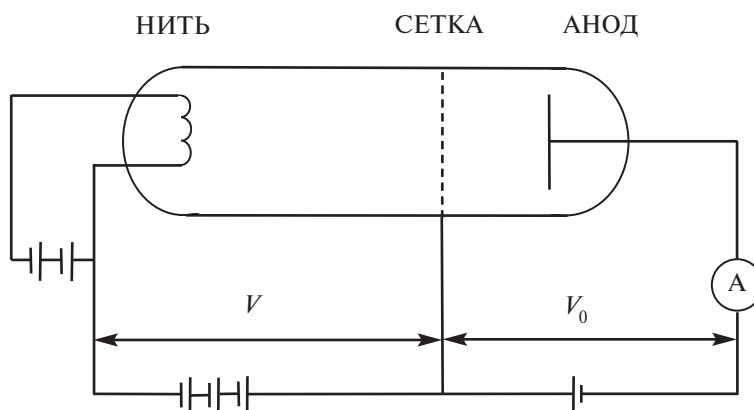


Рис. 18. Прибор для опыта Франка—Герца

Чтобы убедиться в том, что критические потенциалы связаны с уровнями в атомах, Дж. Франк и Г. Герц наблюдали спектры ис-

пускания паров при бомбардировке их электронами. В случае паров ртути они обнаружили, например, что для возбуждения спектральной линии ртути, отвечающей длине волны 2536 А, необходимы электроны с минимальной энергией 4,9 эВ, а фотон света длиной волны 2536 А имеет энергию, в точности равную 4,9 эВ.

Таким образом, атом извне может получать только определенные порции энергии. Это означает, что энергия атома принимает только дискретный ряд значений.

Дискретный характер значений основных величин, характеризующих состояние атомных систем, глубоко противоречит всей совокупности представлений классической механики. Трудность понимания свойств микрочастиц усугубляется еще и тем, что наряду со свойствами дискретности некоторых величин, характеризующих состояние частиц, в ряде опытов проявлялась ясно выраженная непрерывность этих же величин.

Оказалось, что микрочастицы удивительным образом сочетают в себе свойства обычных частиц — корпускул — и свойства волн. Это основное свойство микрочастиц носит название **корпускулярно-волнового дуализма**.

Основной особенностью корпускул, изучаемых в классической механике, является наличие у них определенной пространственной протяженности. Идеализацией корпускулы служит материальная точка, не имеющая размеров и двигающаяся по определенной траектории.

Свойства волновых процессов в классической физике до известной степени являются обратными свойствам корпускулярных объектов. Монохроматическая волна прежде всего обладает бесконечной протяженностью в пространстве. Не имеет также смысла говорить о ее траектории. Таким образом, в классической физике локализованные корпускулы и делокализованные в пространстве волновые процессы являются в известном смысле антиподами.

Оказалось, что у микрочастиц имеет место сочетание корпускулярных и волновых свойств, необъяснимое с точки зрения обычных наглядных представлений классической физики. В некоторых условиях микрочастицы ведут себя как корпускулы, а в других условиях те же микрочастицы обнаруживают чисто волновые свойства. Наконец, в некоторых опытах одновременно проявляются и корпускулярные, и волновые свойства.

Корпускулярно-волновой дуализм свойств микрочастиц был первоначально обнаружен в опытах со световыми квантами. Что касается корпускулярных свойств электромагнитного поля, то они особенно наглядно проявляются в эффекте Комптона и в фотоэффекте. Волновая теория света, успешно применявшаяся при рассмотрении явлений интерференции, дифракции и иных, оказалась совершенно непригодной для объяснения ряда процессов, в которых проявлялась корпускулярная природа света. Свет иногда ведет себя как поток корпускул, фотонов.

Совокупность экспериментальных данных показала, что каждому фотону следует приписать энергию  $E$  и импульс  $p$ , равные соответственно:

$$E = \hbar\omega, \quad (108)$$

$$p = E / c = 2\pi\hbar / \lambda = h / \lambda. \quad (109)$$

Здесь  $h = 6,62 \times 10^{-34}$  Дж с (постоянная Планка), а  $\hbar = h / 2\pi$ .

Соотношение (109) связывает корпускулярные и волновые свойства фотонов.

Корпускулярные свойства микрочастиц обнаружены сравнительно давно. Обнаружению волновых свойств электронов, протонов и других микрочастиц предшествовало развитие системы представлений квантовой механики, в которой существование волновых свойств микрочастиц было предсказано теоретически.

В 1924 г. *Луи де Бройль* исходя из предположения, что природа симметрична, высказал идею о том, что материя обладает как волновыми, так и корпускулярными свойствами. Импульс частицы с массой  $m$  и скоростью  $v$  равен  $p = mv$ , следовательно, ее дебройлевская длина волны есть:

$$\lambda = h / mv. \quad (110)$$

Чем больше импульс частицы, тем меньше соответствующая ей длина волны. В уравнении (110)  $m$  — релятивистская масса:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Переменная величина, характеризующая волны де Бройля, называется **волновой функцией** и обозначается символом  $\Psi$  (греческая буква «пси»). В настоящее время общепринятой является интерпретация волновой функции, предложенная в 1926 г. **Максом Борном**. Согласно этой интерпретации величина  $|\Psi(x, y, z, t)|^2 dV$  пропорциональна вероятности того, что частица в момент времени  $t$  будет обнаружена в элементе объема  $dV$ , расположенном в окрестности точки  $x, y, z$ . Обозначая вероятность через  $dW$ , имеем:

$$dW \sim |\Psi(x, y, z, t)|^2 dV. \quad (111)$$

В опытах с пропусканием отдельных электронов через одну или две щели мы видели, что место попадания электрона на фотопластинку являлось до известной степени случайным. Электрон мог совершенно случайно попасть в ту или иную точку будущего дифракционного кольца. Поэтому поведение электрона должно характеризоваться некоторой вероятностной функцией. Интенсивность почернения пластинки в данном месте пропорциональна числу попадающих электронов. Ясно, что эта вероятностная функция должна быть связана со свойствами волнового поля. Только при этом можно совместить вероятностный характер потемнения пластинки со строгим пространственным распределением полос потемнения. Именно совместить случайный характер попадания электрона в данную точку с его волновыми свойствами можно, только допустив, что вероятность обнаружения электрона в данном месте пропорциональна интенсивности волнового поля  $|\Psi|^2$ . Эта связь выражается формулой (110).

Физическая трактовка волновой функции, даваемая формулой (110), ясно показывает, что волновое поле  $\Psi(x, y, z, t)$  существенно отличается от других волновых полей, известных в классической физике. Это особенно наглядно проявляется в том, что непосредственный физический смысл имеет только величина  $|\Psi|^2$ . Сама волновая функция может быть, вообще говоря, комплексной величиной.

Задачей квантовой механики является нахождение волновой функции  $\Psi$  частицы, свободное движение которой ограничено действием внешних сил. Прежде чем мы рассмотрим нахождение

волновой функции, выясним некоторые условия, которым она должна удовлетворять. Поскольку значение  $|\Psi|^2$ , вычисленное в некоторой точке, пропорционально вероятности  $W$  обнаружения частицы, описываемой функцией  $\Psi$ , в этой точке, то интеграл от  $|\Psi|^2$  по всему пространству должен быть конечным, так как в любом случае частица где-то должна быть. Обычно удобно считать, что значение  $|\Psi|^2$  в точности равно вероятности  $W$  обнаружения частицы, а не просто пропорционально ей. В этом случае должно быть справедливо соотношение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dV = 1. \quad (112)$$

поскольку равенство (111) равносильно утверждению, что частица всегда где-то находится, записанному в математической форме. Волновую функцию, для которой выполняется соотношение (111), называют **нормированной**. Функция  $\Psi$  должна быть не только нормированной, но и однозначной, поскольку  $W$  может иметь только одно значение в каждой точке пространства в определенный момент времени. Следующим условием, которому должны удовлетворять как сама волновая функция, так и ее частные производные по координатам, является их непрерывность во всех точках пространства.

Заметим, что волновая функция, нормированная условием (112), определена с точностью до множителя  $e^{i\alpha}$ , где  $\alpha$  — любое действительное число, ввиду равенства

$$|e^{i\alpha}|^2 = 1.$$

Так как мы связываем волны де Бройля с движущимся телом, естественно считать, что эти волны распространяются с той же скоростью, что и тело. Если скорость волны де Бройля обозначить  $u$ , для определения значения этой скорости можно использовать обычную формулу:  $u = \nu\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны де Бройля. Будем считать, что частота определяется квантовым уравнением  $E = h\nu$ ,



откуда  $v = E / h$ , или, учитывая, что  $E = mc^2$ , имеем  $v = mc^2 / h$ . Следовательно, скорость волны де Бройля равна

$$u = v\lambda = (mc^2 / h)(h / mv) = c^2 / v$$

Скорость частицы не может быть равна или больше скорости света  $c$ , скорость волны де Бройля всегда больше скорости света. Очевидно, что  $u$  и  $v$  для движущегося тела никогда не равны друг другу. Для того чтобы понять этот неожиданный результат, вспомним понятия фазовой и групповой скоростей. Фазовая скорость распространения волны равна  $w = 2\pi v / k$ , где  $k$  — волновое число.

Амплитуда волн де Бройля, соответствующих движущемуся телу, характеризует вероятность того, что это тело может быть обнаружено в определенный момент времени в определенном месте. Ясно, что волны де Бройля нельзя описать просто формулой, похожей на ту, которая отвечает последовательности волн с одинаковой амплитудой  $A$ . Можно ожидать, что волновое представление движущегося тела имеет вид волнового пакета или волновой группы. Амплитуды волн, составляющих группу, меняются соответственно вероятности обнаружения тела.

Скорость распространения волновых пакетов (групповая скорость) определяется соотношением:

$$w = dv / dk. \quad (113)$$

Характеризующие волны де Бройля угловая частота и волновое число, связанные с телом, имеющим массу покоя  $m$  и движущимся со скоростью  $v$ , равны

$$\omega = 2\pi v = 2\pi mc^2 / h = \frac{2\pi m_0 c^2}{h\sqrt{1 - v^2 / c^2}}. \quad (114)$$

$$k = 2\pi / \lambda = 2\pi mv / h = \frac{2\pi m_0 v}{h\sqrt{1 - v^2 / c^2}}. \quad (115)$$

Как  $\omega$ , так и  $k$  являются функциями скорости  $v$ . Групповая скорость волн де Бройля равна

$$w = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega / dv}{dk / dv},$$

$$\frac{d\omega}{dv} = \frac{2\pi m_0 v}{h(1 - v^2 / c^2)^{3/2}},$$

$$\frac{dk}{dv} = \frac{2\pi m_0}{h(1 - v^2 / c^2)^{3/2}}.$$

Откуда групповая скорость равна  $u = v$ . Волновой пакет де Бройля, связанный с движущимся телом, распространяется с той же скоростью, что и тело. Фазовая же скорость волн де Бройля не имеет наглядного физического представления.

На первых порах развития квантовой механики была сделана попытка разрешить корпускулярно-волновой дуализм частиц, рассматривая частицы как волновые пакеты. Привлекательность подобной модели связана с тем, что групповая скорость пакета совпадает со скоростью частицы и с тем, что хотя бы в принципе можно строить волновые пакеты со сколь угодно малой пространственной протяженностью. Однако от подобной интерпретации волн де Бройля пришлось быстро отказаться. Дело в том, что только в первом приближении пакет сохраняет свою форму и ширину. На самом деле со временем волновой пакет расплывается. Причиной расплывания волнового пакета является то, что составляющие его волны движутся с разными фазовыми скоростями. Поэтому представление частицы в виде волнового пакета не всегда возможно. В настоящее время принята другая, а именно статистическая интерпретация функций, описывающих движение микрочастиц, предложенная М. Борном.

Экспериментально волновые свойства микрочастиц, предсказанные де Бройлем, были обнаружены в 1927 г. К. Дэвиссоном и Л. Джермером в опытах по дифракции электронов. Идея этих опытов и их результаты сводятся к следующему. Через малое отверстие в непроницаемом экране пропускаются отдельные электроны, прошедшие через фиксированное ускоряющее поле. Проходя че-

рез отверстие, электроны попадают на фотопластинку, вызывая ее почернение в местах попадания. Если бы электроны двигались, как корпускулы, по законам классической механики и не взаимодействовали с краем экрана, то все они попали бы в центр фотопластинки, образуя пятно почернения. В действительности электроны должны взаимодействовать с атомами экрана. В центре интенсивность почернения должна быть больше, а к краям экрана — убывать. В действительности ничего подобного на опыте не наблюдается. Если последовательно пропускать через отверстие большое число электронов, то можно обнаружить следующее:

- 1) существуют зоны на фотопластинке, в которые электроны никогда не попадают. Эти зоны имеют характер концентрических колец вполне определенной ширины («запрещенные» кольца);
- 2) зоны попадания электронов образуют систему концентрических колец, чередующихся с «запрещенными» кольцами.

Проводя опыт достаточно долго, т. е. пропуская достаточно много электронов, можно получить полосы почернения, совершенно идентичные с полосами, возникающими при дифракции света от круглого отверстия. Тот же результат получается и при другой постановке описанного опыта. Вместо того чтобы пропускать электроны поодиночке, можно направить на отверстие экрана пучок электронов. Пучок должен быть достаточно разреженным, чтобы взаимодействие между электронами не играло роли.

Таким образом, движение каждого отдельного электрона существенным образом отличается от движения классической частицы, проходящей через щель в экране.

На первый взгляд может показаться, что результаты описанных измерений можно интерпретировать следующим образом: по каким-то неизвестным причинам в природе могут реализоваться не все возможные траектории движения электронов, а лишь некоторые, допустимые. Совокупность этих допустимых траекторий определяет места попадания электронов на пластинку. Однако другие опыты показывают ошибочность подобной трактовки.

Рассмотрим непроницаемый экран с двумя отверстиями. Если поочередно закрывать одно из отверстий, а через другое про-

пускать последовательно отдельные электроны, то после прохождения большого числа электронов на фотопластинке возникнут две описанные выше картины интерференционных полос с центральным пятном против каждого из отверстий. Откроем теперь оба отверстия и пропустим через них электроны. Допустим, что каждый из электронов движется по определенной дозволенной траектории. Проходя через одно из отверстий, электрон вызывает почернение в определенном месте фотопластинки. Суммарная картина почернения, создаваемая большим числом электронов, при этом должна была бы являться простым наложением интенсивностей почернений, возникавших при пропускании электронов через одно отверстие. Иначе говоря, должно получиться такое почернение пластинки, что и при последовательном прохождении электронов сперва через одно, а потом через другое отверстие. Фактически, однако, картина распределения интенсивности почернения имеет совершенно иной характер. Почернение фотопластинки в точности соответствует картине дифракции от двух щелей. Это означает, что никаких возможных или допустимых траекторий электрона не существует. Подобно волне, электрон обладает интерференционными свойствами, и бессмысленны были бы попытки установить, через какую из двух открытых щелей в действительности «прошел» данный электрон.

Видно, что с электроном связан некоторый волновой процесс, электрон обладает волновыми свойствами. Именно из-за этих волновых свойств отдельный электрон, проходящий через одно отверстие, может попасть в одни области фотопластинки и не может попасть в другие ее участки. При прохождении через две щели волновые свойства отдельного электрона изменяются. Дозволенные и недопозволенные для попадания участки фотопластинки совпадают с темными и светлыми зонами при дифракции от двух щелей.

Было бы неверным, однако, на основании сказанного попытаться отождествить электрон с некоторой волной. Если бы это было так, то потемнение фотопластинки, на которую попадает дифрагированная волна (отдельный электрон), было бы бледной копией потемнения, образованного многими электронами.

Отдельный электрон сразу бы давал бы всю картину интерференции. На самом деле на опыте отдельный электрон попадает в определенную точку пластинки как отдельная корпускула. Отличие отдельного электрона от корпускулы проявляется в том, что места попадания на фотопластинку определяются совершенно иным законом, чем места попадания корпускулы. Таким образом, волновые свойства, как показывает дифракционный опыт, присущи каждому отдельному электрону, но наглядно выявляются они только в большом числе одинаковых экспериментов (последовательное прохождение большого числа электронов).

Дифракционные опыты позволяют определить, что электрон не является ни волной (иначе один электрон давал бы полную дифракционную картину), ни корпускулой, которая движется по определенной траектории (как это показывает опыт с двумя щелями). Электрон является микрочастицей, обладающей специфическими свойствами. Заметим, что, хотя всюду говорилось об электроне, это в равной степени относится к любой другой микрочастице. Дифракционные опыты были осуществлены с нейтронами, протонами и другими микрочастицами.

## **2. Соотношение неопределенности.**

### ***Применение соотношения неопределенностей***

То обстоятельство, что движущееся тело следует рассматривать как волновой пакет де Бройля, а не как локализованный объект, наводит на мысль, что существует принципиальный предел точности, с которой можно измерять корпускулярные свойства этого тела. Частица волнового пакета де Бройля может находиться в любом месте в пределах волнового пакета. Если пакет довольно узок, то положение частицы определить легко, но при этом нельзя определить длину волны. Другой крайностью является широкий пакет; в этом случае можно довольно надежно определить длину волны, но трудно установить, где частица находится.

Непосредственное рассмотрение процесса образования волновых пакетов позволит нам связать неопределенность  $\Delta x$ , существующую при измерении положения частицы, с имеющей место неопределенностью  $\Delta p$  при одновременном измерении ее им-

пульса. Рассмотрим простейший пример образования волновых пакетов, возникающих при сложении двух волн де Бройля:

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= A \cos(\omega t - kx), \\ \Psi_2 &= A \cos[(\omega + \Delta \omega)t - (k + \Delta k)x].\end{aligned}$$

Результирующая волна де Бройля в любой момент времени  $t$  и в любом месте  $x$  определяется суммой  $\Psi_1 + \Psi_2$ . Используя тождество

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos[(\alpha + \beta) / 2] \cos[(\alpha - \beta) / 2]$$

и соотношение  $\cos(-\theta) = \cos \theta$ , получим

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = 2A \cos(\omega t - kx) \cos[(\Delta \omega t / 2) - (\Delta k x / 2)]. \quad (116)$$

Видно, что ширина каждого пакета равна половине модулирующей длины волны  $\lambda_m$ . Разумно предположить, что эта ширина того же порядка, что и неопределенность  $\Delta x$  в положении пакета, т. е.:

$$\Delta x = \lambda_m / 2. \quad (117)$$

Модулирующая длина волны  $\lambda_m$  связана со своим волновым числом  $k_m$  соотношением  $\lambda_m = 2\pi / k_m$ . Из уравнения (116) видно, что волновое число  $k_m$  модулирующей волны равно  $k_m = \Delta k / 2$ , откуда имеем:

$$\begin{aligned}\lambda_m &= \frac{2\pi}{\Delta k / 2}, \\ \Delta x &= 2\pi / \Delta k.\end{aligned}$$

Так как волны, составляющие пакеты, являются суммой волн с волновыми числами  $k$  и  $k + \Delta k$ , то при самом точном измерении волнового числа, которое мы могли бы провести, точность в измерении  $k$  была бы не лучше  $\Delta k$ . Эта неопределенность связана с неопределенностью в положении волнового пакета уравнением (117), а именно:

$$\Delta k = 2\pi / \Delta x. \quad (118)$$

Длина волны де Бройля для частицы с импульсом  $p$  равна  $\lambda = h/p$ , а волновое число, соответствующее этой длине волны,  $k = 2\pi/\lambda = 2p/h$ . Таким образом, неопределенность волнового числа, соответствующего волнам де Бройля, связанным с частицей, приводит к неопределенности  $\Delta p$  в импульсе частицы, которая определяется формулой:

$$\Delta p = h\Delta k / 2\pi. \quad (119)$$

Подставив сюда значение  $\Delta k$  из (118), получим:

$$\Delta p = \Delta h/x$$

или

$$\Delta p \Delta x \geq h. \quad (120)$$

Появление знака  $>$  связано с тем, что волновые пакеты могут иметь разную форму.  $\Delta x$  и  $\Delta p$ , фигурирующие в формуле (120), суть минимальные значения неопределенностей соответствующих величин, которые обусловлены волновым характером движущихся тел, любые приборные и статистические неточности, возникающие при проведении измерений, определяются только произведением  $\Delta x \Delta p$ .

Формула (120) — одна из записей соотношения неопределенностей, впервые выведенного *Вернером Гейзенбергом* в 1927 г. Согласно этому соотношению произведение неопределенности  $\Delta x$  в положении тела в определенный момент времени на неопределенность  $\Delta p$  в значении его импульса в тот же момент времени в лучшем случае равно постоянной Планка  $h$ . Мы не можем одновременно измерить координату и импульс тела с абсолютной точностью. Если нам удастся измерить положение тела с малой погрешностью  $\Delta x$ , соответствующей узкому волновому пакету, то при этом будет велико значение  $p$ . Если нам удастся каким-то образом снизить погрешность  $\Delta p$  (что может иметь место в случае широкого волнового пакета), то будет велика погрешность  $\Delta x$ . Источник этих погрешностей заключен не в наших приборах, а в самой природе вещей.

Соотношение неопределенностей можно получить различными способами. Выведем его исходя из корпускулярного характера волн, а не из волнового характера частиц, как мы сделали это выше. Допустим, мы хотим измерить координату и импульс какого-нибудь объекта в определенный момент времени. Для этого нужно каким-то образом провзаимодействовать с этим объектом, чтобы получить интересующую нас информацию, т. е. мы должны дотронуться до него пальцами, осветить его светом или проделать еще какую-нибудь операцию. Электрон мы могли бы исследовать с помощью света с длиной волны  $\lambda$ . При этом фотон света должен столкнуться с электроном и отскочить от него. Каждый фотон света обладает импульсом, равным  $h / \lambda$ , и при столкновении он изменяет начальный импульс электрона  $p$ . Точное изменение импульса предсказать нельзя, но, по всей вероятности, оно должно быть того же порядка, что и импульс фотона. Таким образом, сам акт измерения приводит к появлению погрешности в определении импульса электрона:

$$\Delta p = h / \lambda . (121)$$

Чем больше длина волны света, используемая при наблюдении электрона, тем меньше погрешность в измерении импульса. Из-за волновой природы света мы ни при каких обстоятельствах не можем рассчитывать на определение положения электрона с абсолютной точностью, но можно с полным основанием надеяться уменьшить погрешность в определении координаты электрона до размеров одной длины волны света, используемого при измерениях, т. е. в лучшем случае:

$$\Delta x = \lambda . (122)$$

Чем меньше длина волны, тем меньше погрешность в определении положения электрона.

Из формул (121) и (122) видно, что если мы используем свет с малой длиной волны для повышения точности в определении координаты, то это приводит к соответствующему уменьшению точности в определении импульса, а при работе со светом с большой



длиной волны получается точное значение импульса и неточное значение координаты.

В процессе рассуждений мы считали, что в любой момент времени электрон характеризуется точным значением координаты и импульса и что именно сам процесс измерения приводит к возникновению неопределенности  $\Delta x \Delta p$ . В действительности же эта неопределенность обусловлена самой природой движущегося тела.

Существование различных способов вывода соотношения неопределенностей, во-первых, говорит о том, что вряд ли можно найти способ обойти это соотношение, и, во-вторых, позволяет дать более простую трактовку этого соотношения, не привлекая понятия волновых пакетов.

В предыдущих рассуждениях не делалось попытки дать точную оценку «неопределенности» в числовом выражении. Так, при выводе формулы (120) с привлечением волновых пакетов мы рассматривали суперпозицию только двух волновых последовательностей. Но при суперпозиции двух последовательностей возникает последовательность волновых пакетов, а не один пакет. Один волновой пакет можно получить при суперпозиции бесконечно большого числа волновых последовательностей, частоты которых, а, следовательно, и волновые числа отличаются друг от друга на бесконечно малые величины. Чем уже группа, тем шире диапазон волновых чисел этой группы. Фурье-анализ показывает, что ширина  $\Delta x$  одного волнового пакета связана с диапазоном  $\Delta k$  волновых чисел волн, в результате суперпозиции которых возникает этот пакет, следующим соотношением:

$$\Delta x \approx 1 / \Delta k, (123)$$

а не соотношением  $\Delta x \approx 2\pi / \Delta k$ , которое характеризует ширину волнового пакета, являющегося членом последовательности, возникающей при суперпозиции только двух групп волн. Так как соотношение (119) остается в силе, получаем новое выражение:

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar, (124)$$

которое более точно соответствует действительности. Это наиболее распространенная форма записи соотношения неопределенностей. Произведение неопределенности  $\Delta x$  в значении координаты тела в некоторый момент времени на неопределенность  $\Delta p$  в значении импульса в этот же момент времени равно или больше  $\hbar$ .

Из неравенства (124) следует, что величины  $\Delta x$  и  $\Delta p$  не могут быть равны нулю одновременно. Это означает, что координата  $x$  и импульс  $p$  не могут одновременно иметь вполне определенные значения. Таким образом, классические понятия пространственного положения и величины импульса применимы к микрочастице в определенных пределах, даваемых соотношением Гейзенберга. Всякая попытка одновременно применить к микрочастице понятия импульса и координаты с большей точностью вне рамок соотношений неопределенности не имеет смысла. Это обстоятельство связано с самой природой микрочастиц, с их корпускулярно-волновыми свойствами.

В этой связи нужно предостеречь от ошибки, допускаемой некоторыми авторами, которые полагают, что соотношения неопределенности Гейзенберга дают ту степень точности, с которой могут быть определены координаты и импульс микрочастицы в рамках квантовой механики. По их мнению, для более точного одновременного определения координат и импульсов необходимо дальнейшее развитие теории.

В действительности это не так. Микрочастица является совершенно новым, отнюдь не классическим объектом, со своими характерными свойствами и законами движения. Как мы уже знаем, отличительной особенностью микрочастиц является обнаруживаемый ими дуализм волновых и корпускулярных свойств. Из дифракционных опытов вытекает, что частица не имеет траектории. Поэтому описывать ее движение, задавая точное значение координаты и импульса в каждый момент времени, как это делается в классической механике, невозможно. Однако можно указать с некоторой степенью точности величину той области пространства, в которой частица с подавляюще большой вероятностью будет обнаружена, и интервал тех значений импульса, которым она

при этом обладает. Значение этих величин дается соотношениями неопределенности Гейзенберга.

Заметим, что когда частица имеет вполне определенное значение импульса  $\Delta p = 0$ , то согласно (124) ее положение совершенно неопределенно, т. е.  $\Delta x \rightarrow \infty$ . Действительно, состояние с определенным импульсом описывается плоской волной де Бройля. Для такой волны квадрат модуля  $|\Psi|^2$  постоянен, т. е. частица с одинаковой вероятностью может быть обнаружена в любой точке пространства.

С другой стороны, если задано вполне определенное положение частицы в данный момент времени, то ее импульс совершенно не определен.

Постоянная Планка  $\hbar$  настолько мала (всего  $6,62 \times 10^{-34}$  Дж·с), что ограничения, накладываемые принципом неопределенности, существенны только в масштабах атомных размеров. Однако в этих микроскопических масштабах имеется большое число явлений, которые можно объяснить с помощью соотношения неопределенностей. Рассмотрим несколько таких примеров.

Довольно интересным является вопрос: есть ли в атомном ядре электроны? Типичные ядра имеют радиус  $10^{-14}$  м. Для электрона, находящегося внутри ядра, неопределенность в координате не может превышать  $10^{-14}$  м. При этом соответствующая неопределенность в импульсе электрона равна:

$$\Delta p \geq \hbar / \Delta x \geq 1,05 \times 10^{-34} / 10^{-14} \geq 1,1 \times 10^{-20} \text{ кг} \times \text{м} / \text{с}.$$

Если неопределенность в импульсе электрона такого порядка, то сам импульс должен быть, по крайней мере, сравним по величине с этим значением. Если импульс электрона равен  $1,1 \times 10^{-20}$  кг·м/с, то его кинетическая энергия  $T$  существенно больше энергии покоя электрона  $m_0 c^2$ , поэтому для определения  $T$  можно применять крайне релятивистскую формулу  $T = pc$ . Подставив соответствующие значения  $p$  и  $c$ , получим  $T = 1,1 \times 10^{-20} \cdot 3 \times 10^8 = 3,3 \times 10^{-12}$  Дж. Поскольку  $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19}$  Дж, то в том случае, если электрон входит в состав ядра, кинетическая энергия должна быть  $> 20$  Мэв. Однако эксперименты показывают, что электроны, связанные

даже с нестабильными атомами, всегда имеют только небольшую долю такой энергии, поэтому можно сделать вывод, что электроны не входят в состав ядер.

Какой же энергией должен обладать электрон, связанный с атомом? Радиус атома водорода составляет примерно  $5 \times 10^{-11}$  м, следовательно, неопределенность в положении электрона не может превышать этого значения. Соответствующая неопределенность в импульсе равна  $p = 2,2 \times 10^{-24}$  кгм/с. Электрон, импульс которого имеет такой порядок величины, является нерелятивистским, поэтому его кинетическая энергия равна:

$$T = p^2 / 2m = (2,2 \times 10^{-24})^2 / (2 \times 9,1 \times 10^{-31}) = 2,7 \times 10^{-18} \text{ Дж},$$

или около 17 эВ. Это вполне правдоподобное значение, записанное в другом виде. Иногда удобно пользоваться соотношением неопределенности, записанным в другом виде. Нам может понадобиться измерить энергию, испускаемую в течение временного интервала  $\Delta t$  в атомных процессах. Если энергия выделяется в виде электромагнитных волн, то ограниченный интервал времени измерения накладывает предел на точность, которой мы можем определить частоту волн  $\nu$ . Допустим, что минимальная неопределенность в числе волн, которые мы пытаемся сосчитать в волновом пакете, равна единице. Так как частота рассматриваемых волн равна числу сосчитанных волн, деленному на интервал времени, то неопределенность в измеряемой частоте равна  $\Delta \nu = 1/\Delta t$ , а соответствующая неопределенность в энергии равна  $\Delta E = \hbar \Delta \nu$ . Таким образом,  $\Delta E = \hbar/\Delta t$  или  $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ .

Более точный расчет дает

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar. \quad (125)$$

В качестве примера использования формулы (125) рассмотрим испускание света «возбужденным» атомом. Такой атом освобождается от избытка энергии путем испускания одного или нескольких фотонов с определенными характеристическими частотами. Средний промежуток времени, который проходит меж-

ду возбуждением атома и последующим высвечиванием энергии, составляет  $10^{-8}$  с. При этом неопределенность в энергии фотона составляет:

$$\Delta E = \frac{h}{\Delta t} = \frac{1,054 \times 10^{-34}}{10^{-8}} = 1,1 \times 10^{-26} \text{ Дж,}$$

а неопределенность в частоте света.  $\Delta \nu = \Delta E / h = 1,6 \cdot 10^7$  Гц.

Это предел точности, с которой мы можем определить частоту излучения атома.

Соотношение неопределенности Гейзенберга, записанное в виде:

$$\Delta \nu \Delta x \geq \hbar / m$$

показывает, что понятия классической физики оказываются применимыми с тем большей степенью точности, чем больше масса частицы. Так как величина квантовой постоянной  $\hbar$  мала, неопределенность в значениях координаты и скорости становится пренебрежимо малой у частиц макроскопически малого, но еще не атомного размера.

Пусть, например, мы имеем тело размером около 1 микрона с массой всего  $10^{-10}$  г. Тогда, если, например, положение тела определено с точностью  $10^{-6}$  см, то

$$\Delta \nu \sim 10^{-11} \text{ см/с.}$$

Мы видим, что погрешность в скорости, которая связана с соотношением неопределенности, пренебрежимо мала уже у такого небольшого тела. Тем более она не играет роли у макроскопических тел.

Приведенные оценки являются иллюстрацией общего важного положения квантовой механики, именуемого принципом со-

ответствия: при переходе к пределу  $\hbar \rightarrow 0$ , т. е. в предположении, что эффектами, пропорциональными квантовой постоянной  $\hbar$ , можно пренебречь, законы и соотношения квантовой механики переходят в соответствующие законы классической механики. Благодаря принципу соответствия возможно установить связь между некоторыми квантовомеханическими величинами и понятиями классической механики.

### **3. Волновая функция свободно движущейся частицы**

Мы уже говорили о том, что величиной, с которой оперирует квантовая механика, является волновая функция частицы. Задачей квантовой механики является нахождение волновой функции частицы, движущейся под действием внешних сил. Уравнение, которому удовлетворяет волновая функция, установил Э. Шредингер. Это уравнение получило название **волнового уравнения**, или **уравнения Шредингера**.

Сразу же подчеркнем, что ни о каком строгом или сколько-нибудь общем выводе этого уравнения не может быть и речи. Как и все основные уравнения физики (например, законы Ньютона, уравнения Максвелла для электромагнитного поля), уравнение Шредингера не имеет вывода. Оно явилось, с одной стороны, обобщением известных опытных данных, а с другой — было великим научным предвидением. Правильность уравнения Шредингера и толкование смысла фигурирующей в нем волновой функции подтверждаются огромным опытным материалом современной атомной и ядерной физики.

Прежде чем перейти к построению и обсуждению волнового уравнения, остановимся на некоторых **основных постулатах квантовой механики**.

Используя результаты экспериментов по дифракции частиц и предполагая, что соотношение для фотона между энергией и частотой применимо и для других частиц, можно допустить, что свободное движение микрочастицы вдоль оси  $x$  будет описываться волновой функцией, соответствующей плоской волне де Бройля:

$$\Psi(x, y, z, t) = A \exp[-i\omega(t - x/v)]. \quad (126)$$

Если в этой формуле заменить  $\omega$  на  $2\pi\nu$ , а  $\nu$  на  $\lambda \nu$ , то эта формула примет следующий вид:

$$\Psi(x, t) = A \exp(-i(2\pi\nu t - 2\pi x / \lambda)). \quad (127)$$

Поскольку  $E = h\nu = 2\pi\hbar\nu$  и  $\lambda = 2\pi\hbar / p$ , формулу (127) можно переписать в виде:

$$\Psi(x, t) = A \exp(-i(Et - px) / \hbar). \quad (128)$$

Выражение (128) является записанным в математической форме волновым представлением свободной частицы, обладающей энергией  $E$  и импульсом  $p$ , и движущейся в направлении  $x$ .

Итак, будем постулировать, что свободное движение частицы с определенной энергией и импульсом описывается волновой функцией (128).

#### 4. Принцип суперпозиции состояний. Уравнения Шредингера

Одним из основных положений квантовой механики является **принцип суперпозиции состояний**. В простейшей форме принцип суперпозиции состояний сводится к двум утверждениям.

1. Если какая-либо система может находиться в состояниях, описываемых волновыми функциями  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$ , то она может находиться и в состояниях, которые описываются волновыми функциями, образующимися из  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  с помощью линейного преобразования:

$$\Psi = c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2, \quad (129)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — любые комплексные числа.

2. Если волновую функцию умножить на любое не равное нулю комплексное число, то новая волновая функция будет соответствовать тому же состоянию системы.

Суперпозиция состояний квантовой теории существенно отличается от суперпозиции колебаний в классической физике, в которой суперпозиция колебания с самим собой приводит к новому колебанию с большей или меньшей амплитудой. Далее, в классической теории колебаний существует состояние покоя, в котором всюду амплитуда колебания равна нулю. В квантовой же теории равенство нулю волновой функции во всех точках пространства соответствует отсутствию состояния.

Для выполнения принципа суперпозиции состояний необходимо, чтобы уравнения, которым удовлетворяют волновые функции, были линейными.

Принцип суперпозиции состояний отражает очень важное свойство квантовых систем, не имеющее аналога в классической физике. Для иллюстрации этого свойства рассмотрим состояние, которое изображается волновой функцией (129), где

$$\Psi_1 = A_1 e^{\frac{i}{\hbar}(p_1 r - Et)},$$
$$\Psi_2 = A_2 e^{\frac{i}{\hbar}(p_2 r - Et)}$$



В состояниях  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  частица движется с определенными значениями импульса  $p_1$  и  $p_2$  соответственно. В состоянии же (128) движение частицы не характеризуется определенным значением импульса, так как это состояние нельзя изобразить плоской волной с одним значением импульса. Новое состояние является в некотором смысле промежуточным между исходными состояниями  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$ . Это состояние тем больше приближается к свойствам одного из исходных состояний, чем больше относительный «вес» последнего, который, как можно показать, пропорционален отношению квадратов модулей соответствующих коэффициентов линейной суперпозиции. Таким образом, квантовая механика допускает состояния, в которых некоторые физические величины не имеют определенных значений.

Нахождение линейного дифференциального уравнения, которому удовлетворяет плоская волна де Бройля (128), не представляет труда. Начнем с того, что продифференцируем выражение (128) дважды по  $x$ , по  $y$  и по  $z$  и составим сумму этих производных:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -p^2 \Psi / \hbar. \quad (130)$$

и один раз по  $t$ :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -iE \Psi / \hbar. \quad (131)$$

Для того чтобы провести последующие преобразования и получить волновое уравнение, нам следует определить энергию  $E$ , входящую в уравнение (131), как полную или как кинетическую. Дело в том, что в случае свободной частицы, описываемой волновой функцией (128), потенциальная энергия  $U=0$  и полная энергия совпадает с кинетической  $E = T$ . Ясно, что если бы мы стали рассматривать энергию  $E$  как полную, то в волновом уравнении не было бы члена, описывающего силовое поле, в котором движется частица. Поэтому  $E$  в уравнении (128) разумно рассматривать как полную энергию.

При скоростях, малых по сравнению со скоростью света, полная энергия частицы  $E$  равна сумме ее потенциальной  $U$  и кинетической  $p^2/2m$  энергии, причем  $U$ , как правило, зависит от положения частицы и времени  $t$ :

$$E = p^2/2m + U. \quad (132)$$

Умножив обе части этого равенства на волновую функцию  $\Psi$ , получим:

$$E\Psi = p^2\Psi/2m + U\Psi. \quad (133)$$

согласно формулам (130) и (131)

$$\begin{aligned} E\Psi &= -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \\ p^2\Psi &= -\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (134)$$

Подставив эти выражения для  $E\Psi$  и  $p^2\Psi$  в (133), имеем:

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) - U\Psi. \quad (135)$$

Уравнение (135) называется **временным волновым уравнением**, или **временным уравнением Шредингера**.

Последнее уравнение принято записывать в виде:

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi - U\Psi, \quad (136)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа (оператор представляет собой математическую запись действия, которое должно быть выполнено над выражением, следующим за оператором).

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Уравнение Шредингера обладает той особенностью, что оно является уравнением первого порядка по времени и содержит множитель  $i$ . Последнее означает, что волновая функция должна быть комплексной. То обстоятельство, что уравнение Шредингера содержит лишь первую производную от волновой функции по времени, тесно связано с выражением принципа причинности в квантовой механике. Закон причинности для микрочастицы можно сформулировать так: пусть известно состояние частицы в начальный момент времени  $t = 0$ . Это означает, что известна ее волновая функция  $\Psi(x, y, z, 0)$ . Если известны все испытываемые микрочастицей взаимодействия, то можно однозначно определить ее волновую функцию в последующие моменты времени  $t > 0$ . Действительно, если бы уравнение Шредингера содержало, например, вторую производную от волновой функции по времени, то для определения волновой функции в произвольный момент времени  $t$  было бы недостаточно знания волновой функции в начальный момент времени.

Часто потенциальная энергия частицы явным образом не зависит от времени. Силы, действующие на частицу, а, следовательно, и  $U$  зависят только от положения частицы. В этих случаях уравнение Шредингера (136) можно упростить, исключив всякую зависимость от  $t$ . Представим волновую функцию  $\Psi(x, y, z, t)$  в виде:

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z) \exp(-iE / \hbar)t). \quad (138)$$

Таким образом,  $\Psi$  является произведением двух функций, одна из которых зависит от времени,  $\exp[-(iE / \hbar)t]$ , а другая — от положения частицы.

Подставив в зависящее от времени уравнение Шредингера выражение для  $\Psi$  в виде (138), получим:

$$\begin{aligned} & -E\Psi \exp[-(iE / \hbar)t] = \\ & = \frac{\hbar^2}{2m} \exp[-(iE / \hbar)t] \Delta \Psi - U\Psi \exp[-(iE / \hbar)t]. \quad (139) \end{aligned}$$

Разделим обе части на общий экспоненциальный множитель:

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\Psi = 0 \quad (140)$$

Уравнение (140) является **уравнением Шредингера для стационарных состояний**.

Волновое уравнение Шредингера играет в квантовой механике ту же роль, что уравнение Ньютона в классической механике. Его можно было бы назвать уравнением движения квантовой частицы. Задать закон движения частицы в квантовой механике — это значит определить значение  $\Psi$ -функции в каждый момент времени в каждой точке пространства.

Для получения закона движения частицы (волновой функции  $\Psi(x, y, z)$ ), помимо уравнения Шредингера, должны быть заданы начальные и граничные условия. Было бы неправильно считать, что с введением уравнения Шредингера увеличивается число аксиом, необходимых для описания физического мира, поскольку второй закон движения Ньютона, являющийся аксиомой классической механики, можно вывести из уравнения Шредингера, рассматривая входящие в него величины как средние, а не как определенные значения.

Волновая функция, описывающая движение частицы, изменяется в пространстве и времени. Однако это изменение не может быть произвольным.

Имеет место некоторый **закон сохранения**. Для формулировки закона рассмотрим интеграл  $\int_V |\Psi|^2 dV$ , представляющий собой

вероятность нахождения частицы в объеме  $V$ . Найдем производную от последнего интеграла по времени. Для вычисления  $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$

и  $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$  воспользуемся уравнением Шредингера (135) и уравнением, сопряженным ему.

Тогда получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \Psi \Psi^* dV &= \int \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Psi^* + \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) dV = \frac{\hbar}{2mi} \int (\Psi \Delta \Psi^* - \\ &- \Psi^* \Delta \Psi) dV = \frac{\hbar}{2mi} \int \operatorname{div}(\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi) dV. \end{aligned} \quad (141)$$

Воспользовавшись теоремой Гаусса—Остроградского, имеем:

$$\int_V \operatorname{div}(\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi) dV = \oint_S (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi) dS,$$

где поверхность  $S$  охватывает объем  $V$ . Поэтому:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V |\Psi|^2 dV = \frac{\hbar}{2mi} \int_S (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi) dS. \quad (142)$$

Введем вектор  $j$ , определенный соотношением:

$$j = \frac{\hbar}{2mi} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*). \quad (143)$$

Тогда (142) переписется в виде:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V |\Psi|^2 dV = \int_S j_n dS. \quad (144)$$

Формула (144) показывает, что плотность вероятности  $|\Psi|^2$  удовлетворяет закону сохранения, а введенный нами вектор  $j$  имеет смысл плотности потока вероятности. Соотношение (144) может быть переписано в дифференциальной форме в виде уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0. \quad (145)$$

Интеграл от нормальной составляющей вектора  $j$  по некоторой поверхности представляет вероятность того, что частица пересечет указанную поверхность в единицу времени.

Рассмотрим, в частности, свободное движение. Волновую функцию возьмем в виде плоской волны (128). Используя соотношение (143), получаем:

$$\frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0. \quad (146)$$

Заметим, что плотность потока  $j$  заведомо обращается в ноль, если состояние системы описывается действительной волновой функцией  $\Psi$ , что непосредственно следует из формулы (143).

Соотношение (145), записанное в форме:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0, \quad (147)$$

можно трактовать как **закон сохранения числа частиц**.

Решив уравнение Шредингера для частицы, находящейся в конкретных физических условиях, мы получаем волновую функцию  $\Psi(x, y, z, t)$ , которая содержит всю информацию о частице (в рамках соотношения неопределенности). Эта информация выражается в виде вероятностей, а не в виде конкретных чисел, за исключением тех случаев, когда некоторые переменные являются квантованными. Рассмотрим в качестве примера среднее значение  $\langle x \rangle$  положения частицы, описываемой волновой функцией частицы  $\Psi(x, t)$ . Это значение мы получили бы, если бы в какой-то момент времени  $t$  экспериментально определяли положение большого числа частиц, описываемых одной и той же волновой функцией, и затем усреднили бы результаты.

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\Psi|^2 dx. \quad (148)$$

Выражение (148) обычно записывают в следующей эквивалентной форме:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi x \Psi dx. \quad (149)$$

Аналогичный способ можно использовать для вычисления среднего значения  $\langle G \rangle$  любой величины (например, потенциальной энергии), которая является функцией положения  $x$  частицы, описываемой волновой функцией  $\Psi$ . Это значение равно:

$$\langle G \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi G \Psi dx. \quad (150)$$

Эта формула справедлива даже в том случае, когда  $G(x)$  зависит от времени, поскольку  $\langle G(x) \rangle$  всегда нужно вычислять при определенном значении  $t$ , так как сама функция зависит от  $t$ .

### ***5. Простейшие случаи движения микрочастиц***

Для решения уравнения Шредингера даже в его простейшем виде (стационарное уравнение) требуется сложный математический аппарат. Поэтому, как правило, студенты начинают изучать квантовую механику только тогда, когда они хорошо овладеют математическим аппаратом. Но поскольку квантовая механика является теорией, результаты которой тесно связаны с действительностью, нужно знать методы этой теории и их приложения, чтобы в какой-то мере понять современную физику. Как мы увидим ниже, даже при довольно ограниченной математической подготовке можно проследить за ходом рассуждений, которые привели квантовую механику к ее величайшим достижениям. Следует отметить также, что точное решение волнового уравнения может быть найдено только лишь в сравнительно небольшом числе простейших случаев. На основных простейших примерах, допускающих точное решение уравнения Шредингера, мы остановимся в этой и следующей лекциях.

Рассмотрим, прежде всего, одномерное движение частицы в потенциальном поле, определенном следующим образом:

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < x < l, \\ \infty & \text{при } x \leq 0 \text{ и } x \geq l. \end{cases}$$

Подобное потенциальное поле мы будем именовать **бесконечно глубокой потенциальной ямой (потенциальным ящиком)**. Интерес к этой задаче определяется тем, что модель потенциальной ямы часто с успехом используется для описания ряда систем, например, электронов в металле или нуклонов в ядре. В этой задаче нас интересуют три момента:

- 1) как решается уравнение Шредингера, когда на движение частицы накладываются ограничения;
- 2) характерные свойства решений этого уравнения, такие как ограничение энергии частицы только некоторыми определенными значениями;
- 3) сравнение результатов, которые получаются при решении задачи с помощью квантовой механики и с помощью ньютоновской механики.

Движение частицы можно определить следующим образом. Пусть частица движется вдоль оси  $x$ , причем в точках  $x = 0$  и  $x = L$  ее движение ограничено бесконечно твердыми стенками. При столкновении с такими стенками частица не теряет энергии, поэтому ее полная энергия остается постоянной. Формально с точки зрения квантовой механики потенциальная энергия  $U$  частицы у обеих стенок ящика бесконечно велика, а между стенками она постоянна и для удобства можно считать, что она равна нулю. Так как энергия частицы не может быть бесконечной, это значит, что частица не может находиться вне ящика, поэтому ее волновая функция  $\Psi = 0$  при  $x \leq 0$  и при  $x \geq L$ :

$$\Psi(0) = \Psi(L) = 0. \quad (151)$$

Требование (151) служит граничным условием для решения уравнения Шредингера внутри потенциальной ямы. В области  $0 < x < l$ ,



внутри ящика, уравнение Шредингера для стационарных состояний имеет вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} = E\Psi. \quad (152)$$

Решение последнего уравнения можно записать как:

$$\Psi = A\sin(kx + \alpha). \quad (153)$$

где  $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ .

Используем теперь граничные условия (151). Из соотношения  $\Psi = 0$  при  $x = 0$  следует, что  $\alpha = 0$ . Условие  $\Psi(l) = 0$  дает:

$$kl = n\pi. \quad (154)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$  — любое целое число большее нуля. В дальнейшем оно будет именоваться **квантовым числом**. Квантовое число  $n$  не может быть равно нулю, так как при  $n = 0$  мы имели бы  $\Psi = 0$ , что означало бы отсутствие частицы во всем пространстве. Условие (154) позволяет найти возможные значения энергии частицы:

$$E_n = \frac{p^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2. \quad (155)$$

Мы видим, что уравнение Шредингера имеет решения, которые удовлетворяют граничным условиям только при дискретных значениях квантового числа  $n$ . Таким образом, энергия частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме оказывается квантованной. Дискретность энергии возникла естественным образом, без каких-либо дополнительных предположений. В данном случае она оказалась непосредственно следующей из граничных усло-

вий, налагаемых на волновую функцию на концах промежутка интегрирования. Состояние частицы с наименьшей возможной энергией будет в дальнейшем именоваться **нормальным**, или **основным**, все остальные состояния — возбужденными. Энергия основного состояния частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме получается из формулы (155) при  $n = 1$ :

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}. \quad (156)$$

Существенен тот факт, что частица в яме не может иметь нулевую энергию. Если бы энергия частицы была бы равна нулю, то это означало бы, что электрон не может находиться в ящике. Этот факт, а также ограничение возможных значений энергии  $E$  набором определенных дискретных значений являются квантовомеханическими результатами, не имеющими аналога в классической механике, где энергия может принимать любые значения, в том числе и равные 0.

Заметим, что значение минимальной энергии частицы находится в соответствии с принципом неопределенности. Действительно, неопределенность координаты частицы  $\Delta x \approx l$ . Неопределенность импульса  $\Delta p$  порядка  $\frac{\hbar}{l}$ . Так как  $p \geq \Delta p$ , то минимальная энергия частицы оказывается равной:

$$\frac{p^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{2ml^2},$$

что по порядку величины совпадает с (156).

Определим теперь расстояние между соседними уровнями энергии:

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (2n + 1).$$

Расстояние между уровнями увеличивается с уменьшением массы частицы и размеров области ее движения  $L$ .

Почему мы не замечаем квантования энергии в нашей повседневной жизни? Мраморный шарик, катающийся взад и вперед между стенками расположенного горизонтально ящика с гладким дном, конечно, может иметь любую скорость и, следовательно, любую энергию, которую мы сообщим ему, в том числе и равную нулю. Чтобы убедиться в том, что соотношение (113), будучи справедливым в микромире, не противоречит нашим непосредственным наблюдениям, вычислим допустимые уровни энергии для электрона в ящике шириной 1А и для шарика массой 10 г, находящегося в ящике шириной 10 см.

В первом случае  $m = 9,1 \times 10^{-31}$  кг и  $L = 1 \text{ \AA} = 10^{-10}$  м, поэтому допустимые уровни энергии электрона есть:

$$E_n = 6 \times 10^{-18} n^2 \text{ Дж} = 38 n^2 \text{ эВ}.$$

Минимальная энергия, которую может иметь электрон, равна 38 эВ, она соответствует  $n = 1$ . Следующие значения его энергии  $E_2 = 152$  эВ,  $E_3 = 342$  эВ и т. д. Эти уровни энергии расположены довольно далеко друг от друга, так что квантование энергии электрона в таком ящике было бы весьма заметным, если бы такой ящик действительно существовал.

Во втором случае  $m = 10$  г и  $L = 10$  см, так что допустимые уровни энергии:

$$E_n = 5,5 \times 10^{-64} n^2 \text{ Дж}.$$

Минимальная энергия, которую может иметь шарик, равна  $5,5 \times 10^{-64}$  Дж и соответствует  $n = 1$ . Скорость шарика с такой кинетической энергией была бы всего  $3,3 \times 10^{-31}$  м/с, и, следовательно, его нельзя было бы отличить от неподвижного шарика. Разумная скорость, которую может иметь шарик (например, 1/3 м/с), соответствует энергетическому уровню с квантовым числом  $n = 10^{30}$ ! При этом допустимые уровни энергии расположены настолько близко, что никак нельзя определить, занимает ли шарик один из уровней энергии, описываемых соотношением (156), или имеет какую-то другую энергию. В самом деле, найдем отношение  $\frac{\Delta E_n}{E_n}$ , т. е. относительное расстояние между уровнями энергии. Мы видим, что это отношение  $\sim 1/n$  и стремится к нулю при

очень больших  $n$ . Таким образом, в нашей повседневной жизни квантовые эффекты незаметны, чем и объясняется успех ньютоновской механики. Дискретность квантовых состояний перестает проявляться при больших квантовых числах, и фактически наступает переход к непрерывному изменению энергии.

Рассмотрим несколько подробнее свойства волновых функций частицы в потенциальной яме. Волновая функция, отвечающая  $n$ -ому уровню энергии, имеет вид:

$$\Psi_n = A_n \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (157)$$

Постоянную  $A_n$  определим из условия нормировки:

$$\int_0^l |\Psi_n|^2 dx = 1.$$

Тогда:

$$|A_n|^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x dx = |A_n|^2 \int_0^l \frac{1}{2} (1 - \cos \frac{2n\pi}{l} x) dx = |A_n|^2 \frac{l}{2} = 1.$$

Отсюда:

$$A_n = \sqrt{\frac{2}{l}}. \quad (158)$$

Таким образом, значение постоянной  $A$  не зависит от квантового числа  $n$ .

В классической механике частица, движущаяся в потенциальной яме, с равной вероятностью может находиться в любой точке внутри ямы. Действительно, вероятность  $dW_{кл}$  обнаружения

частицы в интервале  $dx$  пропорциональна времени  $dt$  нахождения частицы в этом интервале:

$$dW_{кл} \sim dt = \frac{1}{v} dx.$$

Поскольку на частицу внутри ямы никакие силы не действуют, она движется с постоянной скоростью  $v$  и, следовательно,  $dW_{кл}$  не зависит от  $x$ . При увеличении квантового числа  $n$  (энергии частицы) максимумы распределения вероятностей стремятся сблизиться друг с другом. В пределе  $n \rightarrow \infty$  распределение вероятностей, получаемое из квантовомеханического расчета, приводит к тем же результатам, что и классическое распределение. Это следует из того, что функция  $\sin^2 \frac{\pi n}{l} x$  быстро осциллирует при изменении  $x$  и при интегрировании по любому конечному интервалу может быть заменена на  $1/2$ . Таким образом, рассмотрение простейшей квантовомеханической системы приводит нас к следующим выводам, имеющим, как мы убедимся в дальнейшем, совершенно общий характер:

- 1) энергия микрочастицы, движущейся в потенциальной яме, пробегает дискретный ряд значений;
- 2) даже при  $E = E_1$  (основное состояние) частица не находится в состоянии полного покоя с кинетической энергией, равной нулю;
- 3) дискретный характер энергетических уровней проявляется при малой массе частиц и малых размерах области, в которой происходит движение;
- 4) при больших значениях квантовых чисел квантовомеханические соотношения переходят в формулы классической физики. Последнее утверждение является частным случаем общего принципа соответствия, с которым мы будем еще неоднократно встречаться.

Из других сравнительно простых задач квантовой механики остановимся на движении частиц в поле сил, которое может быть представлено в виде потенциального барьера. Это означает, что

силы действуют на частицу в некоторой ограниченной области пространства. Вне этой области частица движется как свободная. Мы увидим, что изучение движения частиц в поле, имеющем вид барьера простейшей формы, позволит выявить ряд важных и принципиально новых свойств квантовых частиц. Начнем наше рассмотрение с простейшего прямоугольного бесконечно протяженного одномерного потенциального барьера, изображенного на рисунке 17.

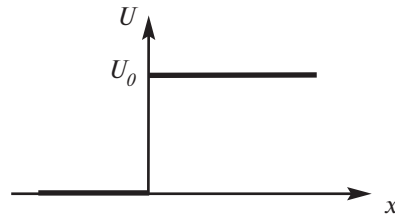


Рис. 17. Прямоугольный бесконечно протяженный одномерный потенциальный барьер

В классической механике всякая частица, двигающаяся слева направо с энергией, меньшей высоты барьера  $U_0$ , полностью отражается от потенциальной стенки. Область  $x > 0$  является для нее недоступной, так как в этой области полная энергия частицы должна бы быть отрицательной, что, очевидно, невозможно. Если же, напротив,  $E$  больше  $U_0$ , то по законам классической механики частица беспрепятственно проходит над барьером, двигаясь в области  $x > 0$  с меньшей кинетической энергией, равной  $E - U_0$ .

Рассмотрим теперь движение частицы в тех же условиях по законам квантовой механики. Для этого напишем уравнение Шредингера для стационарных состояний частицы в поле бесконечно протяженного барьера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + U(x)\Psi = E\Psi, \quad (159)$$

где  $U$  — потенциальная энергия, график которой изображен на рисунке 17.

Решение уравнения (159) удобно рассмотреть в двух различных областях. Область I простирается от  $x = -\infty$  до  $x = 0$ , область II — от  $x = 0$  до  $x = \infty$ .

Напишем уравнение Шредингера для каждой из указанных областей:

$$I : \frac{d^2\psi}{dx^2} + k_1^2 = 0, \quad (160)$$

$$II : \frac{d^2\psi}{dx^2} + k_2^2 = 0,$$

где введены обозначения

$$k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad (161)$$

$$k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0).$$

Решения этих уравнений соответственно запишутся в виде:

$$\psi_1 = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_2 x}, \quad x < 0, \quad (162)$$

$$\psi_2 = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ikx_2}, \quad x > 0.$$

В этих формулах члены вида  $e^{ikx}$  представляют плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $x$ , а  $e^{-ikx}$  — плоскую волну, распространяющуюся в обратном направлении. Амплитуды  $A_1, B_1, A_2, B_2$  являются постоянными интегрирования. Зададим поток частиц, падающих на барьер. Тогда согласно (162)

$$j_0 = \frac{\hbar k}{m} |A_1|^2.$$

Здесь  $j_0$  — плотность потока падающих частиц. Выберем для простоты поток таким, чтобы можно было положить  $A_1 = 1$ .

Для определения остальных постоянных рассмотрим поведение волновой функции на границе областей I и II в точке  $x = 0$ . В силу общих условий, накладываемых на волновую функцию и ее производную, они должны оставаться непрерывными даже в точке разрыва потенциальной энергии. Поэтому при  $x = 0$  должны иметь место равенства:

$$\Psi(+0) = \Psi(-0), \quad (163)$$

$$\Psi'(+0) = \Psi'(-0). \quad (164)$$

Из соотношений (163) и (164) можно определить еще две постоянные интегрирования  $A_2$  и  $B_1$ . Что касается постоянной  $B_2$ , то мы должны положить  $B_2 = 0$ . Действительно, мы задаем поток частиц, распространяющихся в положительном направлении оси  $x$ . При  $E > U_0$  (т. е. при вещественном  $k_2$ ) слагаемое в волновой функции, пропорциональное  $e^{-ik_2x}$ , представляет плоскую волну, распространяющуюся в обратном направлении. В области I в отрицательном направлении оси  $x$  распространяется отраженная волна. В области II отраженной волны, очевидно, нет и, следовательно, нет волны, распространяющейся справа налево. Поэтому мы должны приравнять нулю амплитуду  $B_2$  этой волны. Если же  $E < U_0$  ( $k_2$  — чисто мнимая величина), то функция экспоненциально возрастает при  $x \rightarrow -\infty$ , что противоречит условию конечности волновой функции. В силу этого коэффициент  $B_2$  должен быть равен нулю и при мнимом значении  $k_2$ , т. е. при  $E < U_0$ .

Рассмотрим более детально случай, когда полная энергия частицы больше высоты потенциального барьера  $E > U_0$ .

Из соотношений (163) и (164), учитывая (162), имеем:

$$\begin{aligned} 1 + B_1 &= A_2, \\ k_1(1 - B_1) &= k_2A_2. \end{aligned}$$

Из этих уравнений находим амплитуды  $A_2$  и  $B_1$ :

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \\ A_2 &= \frac{2k_1}{k_1 + k_2}. \end{aligned} \quad (165)$$



Мы видим, что  $B_1$  — амплитуда отраженной волны, отлична от нуля, хотя  $E > U_0$ . Это обстоятельство обусловлено волновыми свойствами частиц. Отношение плотности потока отраженных частиц  $j_r$  к плотности потока падающих частиц  $j_0$  назовем коэффициентом отражения  $R$ . Соответственно, отношение плотности потока проходящих частиц  $j_D$  к плотности потока падающих назовем коэффициентом прохождения  $D$ .

Учитывая (162), находим:

$$j_r = \frac{\hbar k_1}{m} |B_1|^2,$$

$$j_D = \frac{\hbar k_2}{m} |A_2|^2.$$

Так как  $j_0 = \frac{\hbar k_1}{m}$ , получаем:

$$R = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2,$$

$$D = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}. \quad (166)$$

Мы видим, что автоматически выполняется соотношение:

$$R + D = 1. \quad (167)$$

выражающее закон сохранения числа частиц.

Рассмотрим теперь случай  $E < U_0$ . При этом  $k_2$  — чисто мнимая величина, которую удобно записать в виде  $k_2 = ik$ , где

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}. \quad (168)$$

Амплитуда отраженной волны  $B_1$  оказывается комплексной величиной, а коэффициенты отражения  $R$  и прохождения  $D$  соответственно равны:

$$R = |B_1|^2 = \left| \frac{k_1 - ik}{k_1 + ik} \right|^2 = 1,$$

$$D = 1 - R = 0. \quad (169)$$

Хотя отражение и является полным, тем не менее волновая функция в области II отлична от нуля и имеет вид:

$$\Psi(x) = A_2 e^{-kx} = \frac{2k_1^2}{k_1^2 + k^2} e^{-kx}. \quad (170)$$

Соответственно плотность вероятности того, что частица находится в точке  $x$  в области  $x > 0$ , равна:

$$|\Psi(x)|^2 = \frac{4k_1^2}{k_1^2 + k^2} e^{-2kx}. \quad (171)$$

Мы видим, что поведение квантовых частиц существенно отличается от классических. Для частицы, двигающейся по законам классической механики, область  $x > 0$  при  $E < U_0$  являлась запретной. Напротив, частица, движущаяся по законам квантовой механики, с известной вероятностью может проникнуть в эту область. Проникновение частиц в область запрещенных энергий представляет специфически квантовый эффект, получивший название туннельного эффекта. Следует отметить, что для частицы проникновение под потенциальный барьер не сопровождается потерей энергии.

С точки зрения классической механики прохождение частицы из области I в область II при  $E < U_0$  было бы связано с нарушением закона сохранения энергии. В квантовой механике, однако, нет никакого парадокса в том, что частицу можно обнаружить

в области под потенциальным барьером. Проанализируем этот вопрос. Пусть нам удалось измерить координату частицы приблизительно, но так, что оказалось, что частица находится где-то справа от барьера в пределах отрезка, равного  $l$ . В таком случае координата частицы уже не будет совершенно неопределенна, но будет нам известна с неточностью  $\Delta x = l$ . Но если мы уже определили координату с неточностью  $\Delta x = l$ , то импульс должен приобрести неопределенность:

$$\Delta p \geq \hbar / l.$$

Откуда может возникнуть этот добавочный импульс  $\Delta p$ ? Чтобы с уверенностью утверждать, что частица находится справа, а не слева от барьера, разрешающая способность оптического прибора, с помощью которого производится определение координаты частицы, должна быть достаточно высока. А для этого, как известно из оптики, длина волны света, применяемого для освещения частицы, должна быть соответственно мала. Но в таком случае частица при рассеянии света получает комптоновский отброс, который и создает неопределенность импульса. Но неопределенности импульса  $\Delta p$  соответствует неопределенность энергии  $\Delta E = (\Delta p)^2 / 2m$ . Оценим ее. Так как вероятность нахождения частицы справа от барьера убывает с увеличением  $x$  экспоненциально, то имеет смысл отыскивать частицу на таких расстояниях от барьера, для которых показатель степени в (171) порядка 1, т. е.:

$$\frac{2}{\hbar} l \sqrt{2m(U - E)} \approx 1,$$

откуда

$$l \approx \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(U - E)}}.$$

Таким образом, неопределенность импульса будет:

$$\Delta p \geq 2\sqrt{2m(U - E)},$$

а, следовательно:

$$\Delta p > \sqrt{2m(U - E)}.$$

Поэтому

$$(\Delta p)^2 > 2m(U - E)$$

и

$$(\Delta p)^2/2m > U - E.$$

Итак, добавочная энергия, которую получает частица при измерении координаты, больше разности между потенциальной и кинетической энергиями, а потому возможность обнаружения частицы справа от барьера не противоречит закону сохранения энергии.

### **6. Линейный осциллятор. Система двух линейных осцилляторов**

Переходя к более сложным квантовомеханическим системам, мы остановимся на теории **линейного гармонического осциллятора**. Такой осциллятор представляет собой квантовый аналог частицы, совершающей малые линейные колебания около положения равновесия. Примером таких колебаний в атомных системах могут служить малые колебания атомов в молекуле. Не менее важным примером может служить также тепловое движение кристалла, которое может быть представлено в виде совокупности гармонических осцилляторов.

Приведенные примеры показывают, что теория линейного гармонического осциллятора является одной из важных задач квантовой механики.

Потенциальная энергия линейного гармонического осциллятора дается известной формулой:

$$U = \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

Поэтому уравнение Шредингера для линейного гармонического осциллятора имеет вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \Psi = E\Psi. \quad (172)$$

при его решении удобно перейти к безразмерным переменным:

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x,$$

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}. \quad (173)$$

В новых обозначениях уравнение Шредингера имеет вид:

$$-\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} + \xi^2\Psi = \lambda\Psi. \quad (174)$$

Для того чтобы выяснить общий характер последнего уравнения, рассмотрим сначала асимптотическое поведение  $\Psi(\xi)$  при очень больших значениях аргумента  $\xi \gg \lambda$ .

При  $\xi \gg \lambda$  в уравнении (174) можно опустить  $\lambda\Psi$  по сравнению с  $\xi^2\Psi$ . При этом имеем, очевидно:

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} - \xi^2\Psi = 0. \quad (175)$$

Асимптотическим решением последнего уравнения, удовлетворяющим требованию конечности при больших  $\xi$ , служит функция:

$$\psi = A\xi^m e^{-\frac{\xi^2}{2}}, \quad (176)$$

где  $A$  — некоторая постоянная

$m$  — любое конечное число.

Будем пытаться искать решение уравнения (174) в виде:

$$\psi = e^{-\frac{\xi^2}{2}} f(\xi), \quad (177)$$

где  $f(\xi)$  — новая неизвестная функция, которая при  $\xi \rightarrow \infty$  ведет себя как  $\xi^m$ .

Подставляя (177) в (174), приходим к следующему уравнению для функции  $f$ :

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} - 2\xi \frac{df}{d\xi} + (\lambda - 1)f = 0. \quad (178)$$

Поскольку точка  $\xi = 0$  не является особой точкой уравнения (178), решение этого уравнения будем искать в виде степенного ряда:

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k. \quad (179)$$

Производные  $\frac{df}{d\xi}$  и  $\frac{d^2 f}{d\xi^2}$  имеют вид:

$$\frac{df}{d\xi} = \sum k a_k \xi^{k-1}$$

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = \sum k(k-1)a_k \xi^{k-2}. \quad (180)$$

Подставляя ряды (180) в уравнение (178), получаем:

$$\sum k(k-1)a_k \xi^{k-2} - 2\xi \sum k a_k \xi^{k-1} + (\lambda - 1) \sum a_k \xi^k = 0. \quad (181)$$

Для того чтобы степенной ряд вида  $\sum c_n \xi^n$  был тождественно равен нулю, необходимо, чтобы обращались в нуль все коэффициенты  $c_n$ . Полагая равным нулю коэффициент при  $\xi^k$ , получаем рекуррентную формулу:

$$a_{k+2} = \frac{2k+1-\lambda}{(k+2)(k+1)} a_k. \quad (182)$$

Нетрудно видеть, что при  $\xi \rightarrow \infty$  ряд ведет себя как  $e^{\xi^2}$ , (182) дает  $a_{k+2} \approx (2/k)a_k$ . При этом функция  $\Psi$  (134) неограниченно возрастает. Но такое решение должно быть опущено.

Мы получим решение, удовлетворяющее необходимым условиям конечности и ведущее себя при  $\xi \rightarrow \infty$  как (176) только в том случае, если ряд (179) сведется к полиному, т. е. оборвется на каком-то члене. Так, предположим, что  $a_n \neq 0$ ,  $a_{n+2} = 0$ . Тогда все последующие коэффициенты также обратятся в нуль, и функция  $f$  сведется к полиному  $n$ -ой степени.

Из (139) следует, что при этом выполняется условие:

$$2n+1-\lambda=0, \quad (183)$$

где  $n$  — целое число,  $n \geq 0$ , так как  $n$  — это номер, на котором ряд обрывается.

Подставляя в (173) значение  $\lambda$ , получаем:

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2). \quad (184)$$

Отсюда видно, что энергия осциллятора может принимать только дискретные значения, причем уровни энергии расположены друг от друга на одинаковых расстояниях, равных  $\hbar\omega$ . Такая система уровней называется **эквидистантной**. Заметим, что наименьшее возможное значение энергии осциллятора, равное  $\hbar\omega/2$ , отлично от нуля. Эта энергия называется нулевой энергией осциллятора и показывает, что квантовый осциллятор никогда не может находиться в состоянии абсолютного покоя. Выпишем волновую функцию, отвечающую  $n$ -ому возбужденному уровню энергии, в виде:

$$\psi_n(\xi) = A_n e^{-\xi^2/2} f_n(\xi), \quad (185)$$

где  $f_n(\xi)$  — полином  $n$ -ой степени с коэффициентами, определяемыми соотношением (182);

и  $A_n$  — множитель, определяемый условием нормировки.

Полиномы  $f_n(\xi)$  носят название **полиномов Чебышева—Эрмита** и обозначаются через  $H_n(\xi)$ . Можно показать, что нормировочный множитель  $A_n$  получается таким:

$$A_n = \left( \frac{m\omega}{\hbar\pi} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{n!2^n}}. \quad (186)$$

Выпишем для иллюстрации полученных выводов выражения для первых трех значений волновых функций  $\psi_n(x)$  и энергий  $E_n$ :

$$E_0 = \hbar\omega/2;$$

$$\psi_0(x) = \frac{1}{(\alpha_0 \sqrt{\pi})^{1/2}} \exp\left(-\frac{(x/x_0)^2}{2}\right), \quad (187)$$



$$E_1 = 3\hbar\omega / 2;$$

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{(2x_0\sqrt{p})^{1/2}} \frac{2x}{x_0} \exp\left(-\frac{(x/x_0)^2}{2}\right), \quad (188)$$

$$E_2 = 5\hbar\omega / 2;$$

$$\Psi_2(x) = \frac{1}{(8x_0\sqrt{p})^{1/2}} \left[ 4\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - 2 \right] \exp\left(-\frac{(x/x_0)^2}{2}\right). \quad (189)$$

Отметим, что волновая функция, отвечающая основному состоянию осциллятора  $n = 0$ , нигде не обращается в нуль. Волновая функция, отвечающая уровню  $n = 1$ , обращается в нуль  $x = 0$ ,  $\Psi_2(x)$ , функция  $n = 2$  обращается в нуль два раза и т. д. Точки, в которых волновая функция обращается в нуль, называются **узловыми точками**. Можно заметить, что число узлов волновой функции равно квантовому числу  $n$ . Каждому значению энергии  $E_n$  отвечает только одна функция  $\Psi_n(x)$ . Следовательно, уровни энергии линейного гармонического осциллятора не вырождены.

Рассмотрим теперь систему двух взаимодействующих гармонических осцилляторов. Пока осцилляторы находятся достаточно далеко друг от друга, они не взаимодействуют и ведут себя независимо друг от друга. Энергия каждого из них квантуется и равна  $\hbar\omega(n + 1/2)$ . Энергия системы в целом равна сумме энергий обоих осцилляторов. Ввиду тождественности осцилляторов одна и та же энергия системы  $E$  может быть представлена двумя способами:  $E = E_1^1 + E_2^2$ , либо как  $E = E_2^1 + E_1^2$ . В первом случае осциллятор 1 имеет энергию  $E_1$ , осциллятор 2 — энергию  $E_2$ . Во втором случае полная энергия  $E$  та же, но энергией  $E_1$  обладает осциллятор 2, а энергией  $E_2$  — осциллятор 1. Если одному и тому же значению энергии  $E$  соответствует несколько различных квантовых состояний, то говорят, что состояние энергией  $E$  вырождено. Энергетический уровень  $E$  называют также **вырожденным**. Следовательно, энергетический уровень  $E$  системы осцилляторов двукратно вырожден.

При сближении осцилляторов в потенциальной энергии системы появляется член  $-\lambda x_1 x_2$ , учитывающий взаимодействие между ними. Чтобы выяснить влияние этого члена, проще всего ввести новые переменные (нормальные координаты):

$$\begin{aligned} q_1 &= (x_1 + x_2) / \sqrt{2}, \\ q_2 &= (x_1 - x_2) / \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (190)$$

В нормальных координатах  $q_1$  и  $q_2$  система совершает два независимых коллективных колебания с частотами:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \omega_0^2 - \lambda / m, \\ \omega_2^2 &= \omega_0^2 + \lambda / m. \end{aligned} \quad (191)$$

Введение нормальных координат формально соответствует переходу к описанию движения системы осцилляторов посредством двух квазичастиц, гармонически колеблющихся с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Движение каждой квазичастицы описывает движение не отдельного осциллятора, а обоих осцилляторов вместе. Энергия первой квазичастицы представляется выражением  $\hbar\omega_1(n_1 + 1/2)$ , второй  $\hbar\omega_2(n_2 + 1/2)$ , причем оба эти уровня не вырождены. Таким образом, в результате взаимодействия происходит расщепление двукратно вырожденного энергетического уровня на два уровня с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Общее число уровней остается неизменным.

Все это можно повторить для системы какого угодно числа тождественных гармонических осцилляторов. Первоначально вырожденный уровень энергии расщепляется на несколько уровней, причем общее число уровней при сближении удаленных осцилляторов остается неизменным.

Мы рассмотрели законы движения одной частицы во внешнем поле. Однако круг рассмотренных задач был весьма ограничен. В самом деле, уже простейшая система атом водорода представляет собой, строго говоря, систему двух частиц. Тем более это относится к таким системам, как многоэлектронные атомы, мо-

лекулы, твердое тело и т. д. Обобщая результаты, полученные нами во второй лекции, сформулируем основное уравнение квантовой механики — **уравнение Шредингера** для системы из  $N$  частиц. Оно имеет вид:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \left( -\frac{\hbar^2}{2m_i} \right) \Delta_i \Psi + \sum_{i=1}^N U_i(r_i) \Psi + U_{\text{вз}}(r_1, r_2, r_3, \dots) \Psi. \quad (192)$$

Здесь  $\Delta_i = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}$  — лапласиан, который действует на координаты  $i$ -ой частицы.  $U_i(r_i)$  — потенциальная энергия  $i$ -ой частицы во внешнем поле.  $U_{\text{вз}}$  — потенциальная энергия взаимодействия частиц между собой,  $m_i$  — масса  $i$ -ой частицы.

Суммирование проводится по всем частицам системы. Волновая функция, описывающая систему частиц, зависит от координат всех частиц и времени.

Уравнение Шредингера для стационарных состояний имеет вид:

$$\sum_{i=1}^N \left( -\frac{\hbar^2}{2m_i} \right) \Delta_i \Psi + \sum_{i=1}^N U_i(r_i) + U_{\text{вз}}(r_1, r_2, r_3, \dots, r_N) \Psi = E \Psi. \quad (193)$$

Можно показать, что в случае системы невзаимодействующих частиц, т. е. при  $U_{\text{вз}} = 0$ , ее волновая функция представляет собой произведение функций, зависящих от координат отдельных частиц:

$$\Psi = \Psi_1(r_1) \Psi_2(r_2) \dots \Psi_N(r_N). \quad (194)$$

Полная энергия системы невзаимодействующих частиц  $E$  равна:

$$E = \sum_{i=1}^N E_i, \quad (195)$$

где  $E_i$  представляют собой энергии отдельных частиц. Таким образом, в случае системы невзаимодействующих частиц волновая функция распадается на произведение волновых функций, а энергия системы является суммой энергий отдельных частиц.

Вероятность обнаружения координат частиц записывается в виде:

$$dW(r_1, r_2, \dots, r_N) = |\Psi_1(r_1)|^2 |\Psi_2(r_2)|^2 \dots |\Psi_N(r_N)|^2. \quad (196)$$

Последний результат находится в полном согласии с теоремой умножения вероятностей независимых событий.

---

---

## Содержание

---

---

<b>ЛЕКЦИЯ № 1. Механика</b> .....	3
1. Кинематика вращательного движения .....	9
2. Динамика вращательного движения .....	15
<b>ЛЕКЦИЯ № 2. Колебательные движения.</b>	
Физический и математический маятники .....	21
<b>ЛЕКЦИЯ № 3. Волны</b> .....	24
<b>ЛЕКЦИЯ № 4.</b>	
Молекулярно-кинетическая теория .....	28
1. Основное уравнение МКТ .....	29
2. Барометрическая формула .....	32
3. Распределение Больцмана .....	34
4. Распределение молекул газа по скоростям .....	34
5. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы .....	35
6. Работа и теплота как две формы передачи энергии .....	36
7. Работа газа при изопроцессах .....	37
8. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам .....	38
9. Адиабатический процесс .....	39
10. Второе начало термодинамики .....	40
11. Энтропия системы .....	41

<b>ЛЕКЦИЯ № 5. Электрическое поле</b>	
в вакууме . . . . .	43
1. Электрический заряд . . . . .	43
2. Теорема Гаусса . . . . .	47
3. Циркуляция вектора $\vec{E}$ . Потенциал . . . . .	57
4. Электрический диполь . . . . .	63
5. Проводники и диэлектрики . . . . .	66
6. Энергия электрического поля . . . . .	75
<b>ЛЕКЦИЯ № 6. Постоянный электрический ток . . . . .</b>	<b>77</b>
1. Плотность тока. Уравнение непрерывности . . . . .	77
2. Закон Ома для однородного проводника . . . . .	79
3. Обобщенный закон Ома . . . . .	81
4. Закон Джоуля—Ленца . . . . .	84
<b>ЛЕКЦИЯ № 7. Магнитное поле в вакууме . . . . .</b>	<b>87</b>
1. Сила Лоренца. Вектор индукции магнитного поля . . . . .	87
2. Закон Био—Савара . . . . .	90
3. Основные законы магнитного поля . . . . .	90
4. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле . . . . .	93
5. Магнитное поле в веществе . . . . .	93
<b>ЛЕКЦИЯ № 8. Электромагнитная индукция . . . . .</b>	<b>99</b>
1. Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца . . . . .	99
2. Явление самоиндукции . . . . .	100
3. Энергия магнитного поля . . . . .	104

<b>ЛЕКЦИЯ № 9. Квантовая механика</b> .....	107
1. Физические основы квантовой механики .....	107
2. Соотношение неопределенности. Применение соотношения неопределенностей .....	117
3. Волновая функция свободно движущейся частицы .....	125
4. Принцип суперпозиции состояний. Уравнения Шредингера .....	128
5. Простейшие случаи движения микрочастиц .....	135
6. Линейный осциллятор. Система двух линейных осцилляторов .....	148

*Оболонский М. О.*

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА  
КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Заведующая редакцией: *Рагулина А. Ю.*  
Выпускающий редактор: *Елистратова М. В.*  
Корректор: *Венедиктова С. Л.*

Формат: 84 × 108/32  
Гарнитура: «Ньютон»