ГИДРАВЛИКА

шпаргалка

Содержание

1а 1. Методы применения законов гидравлики

1. **Аналитический.** Цель применения этого метода — устанавливать зависимость между кинематическими и динамическими характеристиками жидкости.

С этой целью пользуются уравнениями механики; в итоге получают уравнения движения и равновесия жидкости.

Для упрощенного применения уравнений механики пользуются модельными жидкостями: например, сплошная жидкость.

По определению, ни один параметр этого континуума (сплошной жидкости) не может быть прерывным, в том числе его производное, причем в каждой точке, если нет особых условий.

Такая гипотеза позволяет установить картину механического движения и равновесия жидкости в каждой точке континуума пространства.

Еще одним приемом, применяемом для облегчения решения теоретических задач, является решение задачи для одномерного случая со следующим обобщением для трехмерного. Дело в том, что для таких случаев не так трудно установить среднее значение исследуемого параметра. После этого можно получить другие уравнения гидравлики, наиболее часто применяемые.

Однако этот метод, как и теоретическая гидромеханика, суть которой составляет строго математический подход, не всегда приводит к необходимому теоретическому механизму решения проблемы, хотя и неплохо раскрывает ее общую природу проблемы.

2. **Экспериментальный.** Основным приемом, по этому методу, является использование моделей, соглас-

2а 2. Основные свойства жидкости

Плотность жидкости. Если рассмотреть произвольный объем жидкости W, то он имеет массу M.

Если жидкость однородна, то есть если во всех направлениях ее свойства одинаковы, то **плотность** будет равна

$$\rho = \frac{M}{W},$$

где M — масса жидкости.

Если требуется узнать r в каждой точке A объема W, то

$$\rho_A = \lim_{\Delta W \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta W},$$

где D — элементарность рассматриваемых характеристик в точке A.

Сжимаемость. Характеризуется коэффициентом объемного сжатия.

$$\beta_c = \frac{1}{W} \times \frac{-dW}{d\rho}.$$

Из формулы видно, что речь идет о способности жидкостей уменьшать объем при единичном изменении давления: из-за уменьшения присутствует знак минус.

Температурное расширение.

$$\beta_r = \frac{1}{W} \times \frac{dW}{dt}.$$

3а 3. Силы, действующие в жидкости

Жидкости делятся на **покоящиеся** и **движущиеся**.

Здесь же рассмотрим силы, которые действуют на жидкость и вне ее в общем случае.

Сами эти силы можно разделить на две группы.

1. **Силы массовые.** По-другому эти силы называют силами, распределенными по массе: на каждую частицу с массой $\Delta M = \rho W$ действует сила ΔF, в зависимости от ее массы.

Пусть объем ΔW содержит в себе точку A. Тогда в точке A:

$$F_A = \lim_{\Delta W \to 0} \frac{\Delta M}{\rho \Delta W}, \qquad (1)$$

где F_A — плотность силы в элементарном объеме.

Плотность массовой силы — векторная величина, отнесена к единичному объему ΔW; ее можно проецировать по осям координат и получить: Fx, Fy, Fz. То есть плотность массовой силы ведет себя, как массовая сила.

Примерами этих сил можно назвать силы тяжести, инерции (кориолисова и переносная силы инерции), электромагнитные силы.

Однако в гидравлике, кроме особых случаев, электромагнитные силы не рассматривают.

2. **Поверхностные силы.** Таковыми называют силы, которые действуют на элементарную поверхность Δw, которая может находиться как на поверхности, так и внутри жидкости; на поверхности, произвольно проведенной внутри жидкости.

Таковыми считают силы: силы давления $\vec{P}$, которые составляют нормаль к поверхности; силы трения $\vec{T}$, которые являются касательными к поверхности.

4а 4. Гидростатическое давление и его свойства

Общие дифференциальные уравнения равновесия жидкости — уравнения Л. Эйлера для гидростатики.

Если взять цилиндр с жидкостью (покоящейся) и провести через него линию раздела, то получим жидкость в цилиндре из двух частей. Если теперь приложить некоторое усилие к одной части, то оно будет передаваться другой через разделяющую плоскость сечения цилиндра: обозначим эту плоскость $S = w$.

Если саму силу обозначить как $\vec{p}$, то взаимодействие, передаваемое от одной части к другой через сечение Δw, и есть гидростатическое давление.

Если оценить среднее значение этой силы,

$$\vec{p}_{cp} = \frac{\vec{p}}{S} = \frac{\vec{p}}{w}.$$

Рассмотрев точку A как предельный случай w, определяем:

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta w}.$$

Если перейти к пределу, то Δw переходит в точку A. Поэтому $\Delta p_x \to \Delta p_n$. В конечном результате $p_x = p_n$, точно так же можно получить $p_y = p_n$, $p_z = p_n$.

Следовательно,

$$p_y = p_n,\ p_z = p_n.$$

Мы доказали, что во всех трех направлениях (их мы выбрали произвольно) скалярное значение сил одно и то же, то есть не зависит от ориентации сечения Δw.

2б Суть явления втом, что слой с меньшей скоростью «тормозит» соседний. В итоге появляется особое состояние жидкости, из-за межмолекулярных связей у соседних слоев. Такое состояние называют вязкостью.

Отношение динамической вязкости к плотности жидкости называется кинематической вязкостью.

$$v = \frac{\mu}{\rho}.$$

Поверхностное натяжение: из-за этого свойства жидкость стремится занимать наименьший объем, например, капли в шарообразных формах.

В заключение приведем краткий список свойств жидкостей, которые рассмотрены выше.

1. Текучесть.
2. Сжимаемость.
3. Плотность.
4. Объемное сжатие.
5. Вязкость.
6. Температурное расширение.
7. Сопротивление растяжению.
8. Свойство растворять газы.
9. Поверхностное натяжение.

1б но теории подобий: при этом полученные данные применяются в практических условиях и становится возможным уточнение аналитических результатов.

Наилучшим вариантом является сочетание двух вышеназванных методов.

Современную гидравлику трудно себе представить без применения современных средств проектирования: это высокоскоростные локальные сети, автоматизированное рабочее место конструктора и прочее.

Поэтому современную гидравлику нередко называют вычислительной гидравликой.

Свойства жидкости

Поскольку газ — следующее агрегатное состояние вещества, то у этих форм вещества существует свойство, общее для обоих агрегатных состояний. Это свойство **текучести**.

Исходя из свойств текучести, рассмотрев жидкое и газообразное агрегатное состояние вещества, увидим, что жидкость — то состояние вещества, в котором его уже невозможно сжимать (или можно сжать бесконечно мало). Газ — такое состояние того же вещества, в котором его можно сжать, то есть газ можно назвать сжимаемой жидкостью, точно так же, как и жидкость — несжимаемым газом.

Другими словами, особых принципиальных различий, кроме сжимаемости, между газом и жидкостью не наблюдается.

Несжимаемую жидкость, равновесие и движение которой изучает гидравлика, называют также **капельной жидкостью**.

4б Вот это скалярное значение приложенных сил и есть гидростатическое давление, о котором говорили выше: именно это значение, сумма всех составляющих, передается через Δw.

Другое дело, что в сумме ($p_x + p_y + p_z$) какая-то составляющая окажется равной нулю.

Как мы в дальнейшем убедимся, в определенных условиях гидростатическое давление все же может быть неодинаково в различных точках одной и той же покоящейся жидкости, т. е.

$$p = f(x, y, z).$$

Свойства гидростатического давления.

1. Гидростатическое давление всегда направлено по нормали к поверхности и его величина не зависит от ориентации поверхности.

2. Внутри покоящейся жидкости в любой точке гидростатическое давление направлено по внутренней нормали к площадке, проходящей через эту точку. Причем $p_x = p_y = p_z = p_n$.

3. Для любых двух точек одного и того же объема однородной несжимаемой жидкости (ρ = const)

$$p_1 + \rho П_1 = p_2 + \rho П_2,$$

где ρ — плотность жидкости;

$П_1$, $П_2$ — значение поле массовых сил в этих точках.

Поверхность, для любых двух точек которой давление одно и то же, называется **поверхностью равного давления**.

3б Если по аналогии (1) определить плотность этих сил, то:

нормальное напряжение в точке A:

$$\vec{P}_A = \lim_{\Delta W \to 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta \omega}. \qquad (2)$$

касательное напряжение в точке A:

$$\vec{T}_A = \lim_{\Delta W \to 0} \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta \omega}. \qquad (3)$$

И массовые, и поверхностные силы могут быть **внешними**, которые действуют извне и приложены к какой-то частице или каждому элементу жидкости; **внутренними**, которые являются парными и их сумма равна нулю.

5а 5. Равновесие однородной несжимаемой жидкости под воздействием силы тяжести

Это равновесие описывается уравнением, которое называется основным уравнением гидростатики.

Для единицы массы покоящейся жидкости

$$gz + \frac{\rho}{p} = \text{const.} \quad (1)$$

Для любых двух точек одного и того же объема, то

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g}, \quad (2)$$

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho}. \quad (3)$$

Полученные уравнения описывают распределение давления в жидкости, которая находится в равновесном состоянии. Из них уравнение (2) является основным уравнением гидростатики.

Для водоемов больших объемов или поверхности требуется уточнения: сонаправлен ли $\vec{g}$ радиусу Земли в данной точке; насколько горизонтальна рассматриваемая поверхность.

Из (2) следует

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z), \quad (4)$$

где $z_1 = z$; $p_1 = p$; $z_2 = z_0$; $p_2 = p_0$.

$$p = p_0 + \rho gh, \quad (5)$$

где ρgh — весовое давление, которое соответствует единичной высоте и единичной площади.

6а 6. Законы Паскаля. Приборы измерения давления

Что произойдет в других точках жидкости, если приложим некоторое усилие Δp ? Если выбрать две точки, и приложить к одной из них усилие Δp_1, то по основному уравнению гидростатики, во второй точке давление изменится на Δp_2.

$$z_1 + \frac{p_1 + \Delta p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2 + \Delta p_2}{\rho g}, \quad (1)$$

откуда легко заключить, что при равности прочих слагаемых должно быть

$$\Delta p_1 = \Delta p_2. \quad (2)$$

Мы получили выражение закона Паскаля, который гласит: изменение давления в любой точке жидкости в равновесном состоянии передается во все остальные точки без изменений.

До сих пор мы исходили из предположения, что ρ = const. Если иметь сообщающийся сосуд, который заполнен двумя жидкостями с $\rho_1 \neq \rho_2$, причем внешнее давление $p_0 = p_1 = p_{атм}$, то согласно (1):

$$\rho_1 gh = \rho_2 gh, \quad (3)$$

откуда

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad (4)$$

где h_1, h_2 — высота от раздела поверхности до соответствующих свободных поверхностей.

7а 7. Анализ основного уравнения гидростатики

Высоту напора принято называть **пьезометрической высотой**, или **напором**.

Согласно основному уравнению гидростатики,

$$p_1 + \rho gh_A = p_2 + \rho gh_H,$$

где ρ — плотность жидкости;

g — ускорение свободного падения.

p_2, как правило, задается $p_2 = p_{атм}$, поэтому, зная h_A и h_H, нетрудно определить искомую величину.

2. $p_1 = p_2 = p_{атм}$. Совершенно очевидно, что из ρ = const, g = const следует, что $h_A = h_H$. **Этот факт называют также законом сообщающихся сосудов.**

3. $p_1 < p_2 = p_{атм}$.

Между поверхностью жидкости в трубе и ее закрытым концом образуется вакуум. Такие приборы называют вакуумметры; их используют для измерения давлений, которые меньше атмосферного.

Высота, которая и является характеристикой изменения вакуума:

$$h = \frac{p_{атм} - p_B}{\rho g}.$$

Вакуум измеряется в тех же единицах, что и давление.

Пьезометрический напор

Вернемся к основному гидростатическому уравнению. Здесь z — координата рассматриваемой точки, которая отсчитывается от плоскости XOY. В гидравлике плоскость XOY называется **плоскостью сравнения**.

8а 8. Гидравлический пресс

Гидравлический пресс служит для совершения на коротком пути большей работы. Рассмотрим работу гидравлического пресса.

Для этого, чтобы совершалась работа над телом, надо воздействовать на поршень с некоторым давлением P. Это давление, как и P_2, создается следующим образом.

Когда поднимается поршень насоса с площадью нижней поверхности S_2, то он закрывает первый клапан и открывает второй. После заполнения цилиндра водой второй клапан закрывается, открывается первый. В результате вода через трубу заполняет цилиндр и давит на поршень с помощью нижнего сечения S_1 с давлением P_2. Это давление, как давление P_1, сжимает тело.

Совершенно очевидно, что P_1 — это то же самое давление, что и P_2, разница только в том, что они воздействуют на разные по величине площади S_2 и S_1.

Другими словами, давления:

$$P_1 = pS_1 \text{ и } P_2 = pS_2. \quad (1)$$

Выразив $p = P_2/S_2$ и подставив в первую формулу, получим:

$$p_1 = P_2 = \frac{S_1}{S_2}. \quad (2)$$

Из полученной формулы следует важный вывод: **на поршень с большей площадью S_1 со стороны поршня с меньшей площадью S_2 передается давление во столько раз большее, во сколько раз $S_1 > S_2$.**

6б Давление — физическая величина, которая характеризует силы, направленные по нормали к поверхности одного предмета со стороны другого.

Если силы распределены нормально и равномерно, то давление

$$\vec{p} = \frac{\bar{F}}{S}, \qquad (5)$$

где $\bar{F}$ — суммарная приложенная сила;

S — поверхность, к которой приложена сила.

Если силы распределены неравномерно, то говорят о среднем значении давления или считают его в отдельно взятой точке: например, в вязкой жидкости.

Приборы для измерения давления

Одним из приборов, которым измеряют давление, является манометр.

Недостатком манометров является то, что у них небольшой диапазон измерений: 1—10 кПа.

По этой причине в трубах используют жидкости, которые «уменьшают» высоту, например, ртуть.

Следующим прибором для измерения давления является пьезометр.

5б Давление p называют **абсолютным давлением** $p_{абс}$.

Если $p > p_{абс}$, то $p - p_{атм} = p_0 + \rho gh - p_{атм}$ — его называют **избыточным давлением**:

$$p_{изч} = p < p_0, \qquad (6)$$

если $p < p_{атм}$, то говорят о разности в жидкости

$$p_{вак} = p_{атм} - p, \qquad (7)$$

называют **вакуумметрическим давлением**.

8б Однако на практике из-за сил трения до 15% этой передаваемой энергии теряется: тратится на преодоление сопротивления сил трения.

И все же у гидравлических прессов **коэффициент полезного действия η = 85%** — достаточно высокий показатель.

В гидравлике формула (2) перепишется в следующем виде:

$$R = \eta P_2 \frac{\omega_1}{\omega_2}. \qquad (3)$$

где P_1 обозначено как R;

S_1 — ω_1;

S_2 — ω_2.

Гидравлический аккумулятор

Гидравлический аккумулятор служит для поддержания давления в подключенной к нему системе постоянным.

Достижение постоянства давления происходит следующим образом: сверху на поршень, на его площадь ω, действует груз P.

Труба служит для передачи этого давления по всей системе.

Если в системе (механизме, установке) жидкости в избытке, то избыток по трубе поступает в цилиндр, поршень поднимается.

При недостатке жидкости поршень опускается, и создаваемое при этом давление p, по закону Паскаля, передается на все части системы.

7б Отсчитанную от этой плоскости координату z называют по-разному: геометрической высотой; высотой положения; геометрическим напором точки z.

В том же основном уравнении гидростатики величина $p/\rho gh$ — также геометрическая высота, на которую поднимается жидкость в результате воздействия давления p.

$p/\rho gh$ так же, как и геометрическая высота, измеряется в метрах. В случае, если через другой конец трубы на жидкость действует атмосферное давление, то жидкость в трубе поднимается на высоту $p_{изб}/\rho gh$, которую называют **вакуумметрической высотой**.

Высоту, соответствующую давлению $p_{вак}$, называют **вакуумметрической**.

В основном уравнении гидростатики сумма $z + p/\rho gh$ — гидростатический напор H, различают также пьезометрический напор H_n, который соответствует атмосферному давлению $p_{атм}/\rho gh$:

$$H_n < H.$$

9a

9. Определение силы давления покоящейся жидкости на плоские поверхности. Центр давления

Для того, чтобы определить силу давления, будем рассматривать жидкость, которая находится в покое относительно Земли. Если выбрать в жидкости произвольную горизонтальную площадь ω, то, при условии, что на свободную поверхность действует $p_{атм} = p_0$, на ω оказывается избыточное давление:

$$P_{изб} = \rho g h \omega. \qquad (1)$$

Поскольку в (1) $\rho g h \omega$ есть не что иное, как mg, так как $h\omega$ и $\rho V = m$, избыточное давление равно весу жидкости, заключенной в объеме $h\omega$. Линия действия этой силы проходит по центру площади ω и направлена по нормали к горизонтальной поверхности.

Формула (1) не содержит ни одной величины, которая характеризовала бы форму сосуда. Следовательно, $P_{изб}$ не зависит от формы сосуда. Поэтому из формулы (1) следует чрезвычайно важный вывод, так называемый **гидравлический парадокс** — при разных формах сосудов, если на свободную поверхность оказывается одно и тоже p_0, то при равенстве плотностей ρ, площадей ω и высот h давление, оказываемое на горизонтальное дно, одно и то же.

При наклонности плоскости дна имеет место смачивание поверхности с площадью ω. Поэтому, в отличие от предыдущего случая, когда дно лежало в горизонтальной плоскости, нельзя сказать, что давление постоянно.

10a

10. Определение силы давления в расчетах гидротехнических сооружений

При расчетах в гидротехнике интерес представляет сила избыточного давления P, при:

$$p_0 = p_{атм},$$

где p_0 — давление, приложенное к центру тяжести.

Говоря о силе, будем иметь в виду силу, приложенную в центре давления, хотя будем подразумевать, что это — сила избыточного давления.

Для определения $\vec{P}_{абс}$ воспользуемся **теоремой моментов**, из теоретической механики: момент равнодействующей относительно произвольной оси равен сумме моментов составляющих сил относительно той же оси.

Теперь, согласно этой теореме о равнодействующем моменте:

$$pl_{ц.д.} = \int l dp.$$

Поскольку при $p_0 = p_{атм}$, $P = \rho g h_{ц.е.} \omega$, поэтому $dP = = \rho g h d\omega = \rho g \sin\theta l d\omega$, следовательно (здесь и далее для удобства не будем различать $p_{изб}$ и $p_{абс}$), с учетом P и dP из (2), а также после преобразований следует:

$$l_{ц.т.} = \frac{I_y}{\omega l_{ц.т.}}.$$

11a

11. Общая методика определения сил на криволинейные поверхности

1. В общем случае, это давление:

$$P_z = \rho g W g,$$

где Wg — обьем рассматриваемой призмы.

В частном случае, направления линий действия силы на криволинейную поверхность тела, давления зависят от направляющих косинусов следующего вида:

$$\cos(\vec{P}, O_X) = \frac{P_x}{P};$$

$$\cos(\vec{P}, O_Z) = \frac{P_x}{P}.$$

Сила давления **на цилиндрическую поверхность с горизонтальной образующей** полностью определена. В рассматриваемом случае ось O_Y направлена параллельно горизонтальной образующей.

2. Теперь рассмотрим цилиндрическую поверхность с вертикальной образующей и направим ось O_Z параллельно этой образующей, что значит $\omega_z = 0$.

Поэтому по аналогии, как и в предыдущем случае,

$$\left.\begin{aligned} P &= \sqrt{P_x^2 + P_y^2} \\ P_x &= \rho g h'_{ц.т.} \omega_x \\ P_y &= \rho g h''_{ц.т.} \omega_y \end{aligned}\right\},$$

12a

12. Закон Архимеда. Условия плавучести погруженных тел

Следует выяснить условия равновесия погруженного в жидкость тела и следствия, вытекающие из этих условий.

Сила, действующая на погруженное тело — равнодействующая вертикальных составляющих P_{z1}, P_{z2}, т. е.:

$$P_{z1} = P_{z1} - P_{z2} = \rho g W_T. \qquad (1)$$

где P_{z1}, P_{z2} — силы $\vec{P}_z$ направленные вниз и вверх.

Это выражение характеризует силу, которую принято называть **архимедовой силой**.

Архимедовой силой является сила, равная весу погруженного тела (или его части): эта сила приложена в центр тяжести, направлена вверх и количественно равна весу жидкости, вытесненной погруженным телом или его частью. Мы сформулировали **закон Архимеда**.

Теперь разберемся **с основными условиями плавучести тела**.

1. Объем жидкости, вытесненной телом, называется **объемным водоизмещением**. Центр тяжести объемного водоизмещения совпадает с центром давления: именно в центре давления приложена равнодействующая сил.

2. Если тело погружено полностью, то объем тела W совпадает с W_T, если нет, то $W < W_T$, то есть $P_z = \rho g W$.

10б Если теперь перенесем ось момента инерции, то есть линию уреза жидкости (ось O_Y) в центр тяжести ω, то есть в точку C, то относительно этой оси момент инерции центра давления точки D будет J_0.

Поэтому выражение для центра давления (точка D) без переноса оси момента инерции от той же линии уреза, совпадающие с осью O_Y, будет иметь вид:

$$I_y = I_0 + \omega l^2_{ц.т.}.$$

Окончательная формула для определения места расположения центра давления от оси уреза жидкости:

$$l_{ц.д.} = l_{ц.г.} + I_0/S.$$

где $S = \omega l_{ц.д.}$ — статистический момент.

Окончательная формула для $l_{ц.д.}$ позволяет определить центр давления при расчетах гидротехнических сооружений: для этого разбивают участок на составные участки, находят для каждого участка $l_{ц.д.}$ относительно линии пересечения этого участка (можно пользоваться продолжением этой линии) со свободной поверхностью.

Центры давления каждого из участков находятся ниже центра тяжести смоченной площади по наклонной стенке, точнее по оси симметрии, на расстоянии $I_0/\omega l_{ц.и.}$.

9б Чтобы определить его, разобьем площадь ω на элементарные площади $d\omega$, на любую из которых действует давление $\vec{p}$.

По определению силы давления,

$$\vec{p}d\omega = \overrightarrow{dP}, \qquad (2)$$

причем $\overrightarrow{dP}$ направлено по нормали к площадке ω.

Теперь, если определить суммарную силу $\vec{P}$, которая воздействует на площадь ω, то ее величина:

$$P_{абс} = \int_\omega (p_0 + \rho gh)d\omega = \rho_0\omega + \int_\omega \rho ghd\omega. \qquad (3)$$

Определив второе слагаемое в (3) найдем $P_{абс}$.

$$P_{абс} = \omega(p_0 + h_{ц.e}). \qquad (4)$$

Получили искомые выражения для определения давлений, действующих на горизонтальную и наклонную плоскости: $P_{изб}$ и $P_{абс}$.

Рассмотрим еще одну точку C, которая принадлежит площади ω, точнее, точку центра тяжести смоченной площади ω. В этой точке действует сила $\vec{P_0} = \rho_0\omega$.

Сила $\vec{P}$ действует в любой другой точке, которая не совпадает с точкой C.

12б 3. Тело будет плавать только в том случае, если вес тела

$$G_T = P_z = \rho gW, \qquad (2)$$

т. е. равен архимедовой силе.

4. Плавание:

1) **подводное,** то есть тело погружено полностью, если P = Gт, что означает (при однородности тела): $\rho gW = \rho_т gW_T$, откуда

$$\frac{W}{W_T} = \frac{\rho_т}{\rho}, \qquad (3)$$

где ρ, ρ_T — плотность жидкости и тела соответственно;
W — объемное водоизмещение;
W_T — объем самого погруженного тела;

2) **надводное,** когда тело погружено частично; при этом глубину погружения низшей точки смоченной поверхности тела называют **осадкой плавающего тела**.

Ватерлинией называют линию пересечения погруженного тела по периметру со свободной поверхностью жидкости.

Площадью ватерлинии называется площадь погруженной части тела, ограниченной ватерлинией.

Линию, которая проходит через центры тяжести тела и давления, называют **осью плавания**, которая при равновесии тела вертикальна.

11б где $h'_{ц.т.}$ — глубина центра тяжести проекции под пьезометрическую плоскость;
$h''_{ц.т.}$ — то же самое, только для ω_y.

Аналогично, направление $\vec{P}$ определяется направляющими косинусами

$$\cos(\vec{P}, OX) = P_x / P;$$

$$\cos(\vec{P}, OY) = P_y / P.$$

Если рассмотреть цилиндрическую поверхность, точнее, объемный сектор, с радиусом γ и высотой h, с вертикальной образующей, то

$$\omega_x = h_y,$$

$$h'_{ц.т.} = 0{,}5h.$$

3. Осталось обобщить полученные формулы для прикладного применения произвольной криволинейной поверхности:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}.$$

13a

13. Метацентр и метацентрический радиус

Способность тела восстанавливать свое первоначальное равновесное состояние после прекращения внешнего воздействия называют **остойчивостью**.

По характеру действия различают **статистическую** и **динамическую остойчивость**.

Поскольку мы находимся в рамках гидростатики, то и разберемся со статистической остойчивостью.

Если образовавшийся после внешнего воздействия крен необратим, то остойчивость неустойчива.

В случае сохранения после прекращения внешнего воздействия, равновесие восстанавливается, то **остойчивость устойчива**.

Условием статистической остойчивости является плавание.

Если плавание **подводное**, то центр тяжести должен быть расположен ниже центра водоизмещения на оси плавания. Тогда тело будет плавать. Если **надводное**, то остойчивость зависит от того, на какой угол θ повернулось тело вокруг продольной оси.

При $\theta < 15^o$, после прекращения внешнего воздействия равновесие тела восстанавливается; если $\theta \geq 15^o$, то крен необратим.

Точку пересечения архимедовой силы $\vec{P}$ с осью плавания называют **метацентром**: при этом $\vec{P}$ проходит также через центр давления.

Метацентрическим радиусом называют радиус окружности, частью которой является дуга, по которой центр давления перемещается в метацентр.

Приняты обозначения: метацентр — M, метацентрический радиус — $\gamma_м$.

14a

14. Методы определения движения жидкости

Гидростатика изучает жидкость в ее равновесном состоянии.

Кинематика жидкости изучает жидкость в движении, не рассматривая сил, порождавших или сопровождавших это движение.

Гидродинамика также изучает движение жидкости, но в зависимости от воздействия приложенных к жидкости сил.

В кинематике используется **сплошная модель жидкости:** некоторый ее континуум. Согласно гипотезе сплошности, рассматриваемый континуум — это жидкая частица, в которой беспрерывно движется огромное количество молекул; в ней нет ни разрывов, ни пустот.

Если в предыдущих вопросах, изучая гидростатику, за модель для изучения жидкости в равновесии взяли сплошную среду, то здесь на примере той же модели будут изучать жидкость в движении, изучая движение ее частиц.

Для описания движения частицы, а через нее и жидкости, существуют два способа.

1. **Метод Лагранжа.** Этот метод не используется при описании волновых функций. Суть метода в следующем: требуется описать движение каждой частицы.

Начальному моменту времени t_0 соответствуют начальные координаты x_0, y_0, z_0.

Однако к моменту t они уже другие. Как видно, речь идет о движении каждой частицы. Это движение можно считать определенным, если возможно указать для каждой частицы координаты x, y, z в произвольной момент времени t как непрерывные функции от x_0, y_0, z_0.

15a

15. Основные понятия, используемые в кинематике жидкости

Сутью вышеупомянутого поля скоростей являются векторные линии, которые часто называют линиями тока.

Линия тока — такая кривая линия, для любой точки которой в выбранный момент времени вектор местной скорости направлен по касательной (о нормальной составляющей скорости речь не идет, поскольку она равна нулю).

$$\frac{dx}{u_x(x,y,z,t)} = \frac{dy}{u_y(x,y,z,t)} = \frac{dz}{u_z(x,y,z,t)}. \qquad (1)$$

Формула (1) является **дифференциальным уравнением линии** тока в момент времени t. Следовательно, задав различные t_i по полученным $\vec{u}_i$, где i = 1, 2, 3, …, можно построить линию тока: ею будет огибающая ломаной линии, состоящей из $\vec{u}_i$.

Линии тока, как правило, не пересекаются в силу условия $\vec{u} \neq 0$ или $\vec{u} \neq \infty$. Но все же, если эти условия нарушаются, то линии тока пересекаются: точку пересечения называют особой (или критической).

1. **Неустановившееся движение,** которое так называется из-за того, что местные скорости в рассматриваемых точках выбранной области по времени изменяются. Такое движение полностью описывается системой уравнений.

16a

16. Вихревое движение

Особенности видов движения, рассматриваемых в гидродинамике.

Можно выделить следующие виды движения.

Неустановившееся, по поведению скорости, давления, температуры и т. д.; **установившееся**, по тем же параметрам; **неравномерное**, в зависимости от поведения тех же параметров в живом сечении с площадью; **равномерное**, по тем же признакам; **напорное**, когда движение происходит под давлением $p > p_{атм}$, (например, в трубопроводах); **безнапорное**, когда движение жидкости происходит только под действием силы тяжести.

Однако основными видами движения, несмотря на большое количество их разновидностей, являются **вихревое** и **ламинарное** движения.

Движение, при котором частицы жидкости вращаются вокруг мгновенных осей, проходящих через их полюсы, называют **вихревым движением**.

Это движение жидкой частицы характеризуется **угловой скоростью**, компонентами (составляющими), которой являются:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon u_z}{\upsilon y} - \frac{\upsilon u_y}{\upsilon z}\right);$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon u_x}{\upsilon z} - \frac{\upsilon u_z}{\upsilon x}\right);$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon u_y}{\upsilon x} - \frac{\upsilon u_z}{\upsilon y}\right).$$

14б

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t),$$
$$y = y(x_0, y_0, z_0, t), \quad (1)$$
$$z = z(x_0, y_0, z_0, t).$$

Переменные x_0, y_0, z_0, t, называют **переменными Лагранжа**.

2. **Метод определения движения частиц по Эйлеру.** Движение жидкости в этом случае происходит в некоторой неподвижной области потока жидкости, в котором находятся частицы. В частицах произвольно выбираются точки. Момент времени t как параметр является заданным в каждом времени рассматриваемой области, которая имеет координаты x, y, z.

Рассматриваемая область, как уже известно, находится в пределах потока и неподвижна. Скорость частицы жидкости $\vec{u}$ в этой области в каждый момент времени t называется **мгновенной местной скоростью**.

Полем скорости называется совокупность всех мгновенных скоростей. Изменение этого поля описывается следующей системой:

$$u_x = u_x(x, y, z, t),$$
$$u_y = u_y(x, y, z, t), \quad (2)$$
$$u_z = u_z(x, y, z, t).$$

Переменные в (2) x, y, z, t называют **переменными Эйлера**.

13б При $\theta < 15^o$

$$\gamma_м = \frac{I_0}{W}, \quad (1)$$

где I_0 — центральный момент плоскости относительно продольной оси, заключенной в ватерлинии.

После введения понятия «метацентр» условия остойчивости несколько изменяются: выше говорили, что для устойчивой остойчивости центр тяжести должен находиться выше центра давления на оси плавания. Теперь предоложим, что центр тяжести не должен находиться выше метацентра. В противном случае силы $\vec{P}$ и $\vec{G}$ будут увеличивать крен.

Как очевидно, при крене расстояние δ между центром тяжести и центром давления меняется в пределах $\delta < \gamma_м$.

$$\frac{\delta}{\gamma_м} < 1. \quad (2)$$

При этом расстояние между центром тяжести и метацентром называют **метацентрической высотой**, которая при условии (2) положительна. Чем больше метацентрическая высота, тем меньше вероятность крена плавающего тела. Наличие остойчивости относительно продольной оси плоскости, содержащей в себе ватерлинию, является необходимым и достаточным условием остойчивости относительно поперечной оси той же плоскости.

16б Вектор самой угловой скорости всегда перпендикулярен плоскости, в которой происходит вращение.

Если определить модуль угловой скорости, то

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}.$$

Удвоив проекции $\vec{\omega}$ на соответствующие координаты оси ω_x, ω_y, ω_z, получим компоненты **вектора вихря**

$$\theta = 2\omega.$$

Совокупность векторов вихря называется **векторным полем**.

По аналогии с полем скоростей и линией тока, существует и **вихревая линия**, которая характеризует векторное поле.

Это такая линия, у которой для каждой точки вектор угловой скорости сонаправлен с касательной к этой линии.

Линия описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{\upsilon x}{\omega_x(x, y, z, t)} = \frac{\upsilon y}{\omega_y(x, y, z, t)} = \frac{\upsilon z}{\omega_z(x, y, z, t)},$$

в котором время t рассматривается как параметр.

Вихревые линии во многом ведут себя так же, как и линии тока.

Вихревое движение называют также **турбулентным**.

15б 2. **Установившееся движение:** поскольку при таком движении местные скорости не зависят от времени и постоянны:

$$u_x = u_x(x, y, z),$$
$$u_y = u_y(x, y, z), \quad (2)$$
$$u_z = u_z(x, y, z).$$

Линии тока и траектории частиц совпадают, а дифференциальное уравнение для линии тока имеет вид:

$$\frac{dx}{u_x(x,y,z)} = \frac{dy}{u_y(x,y,z)} = \frac{dz}{u_z(x,y,z)}. \quad (3)$$

Совокупность всех линий тока, которые проходят через каждую точку контура потока, образует поверхность, которую называют **трубкой тока**. Внутри этой трубки движется заключенная в ней жидкость, которую называют **струйкой**.

Струйка считается **элементарной**, если рассматриваемый контур бесконечно мал, и **конечной**, если контур имеет конечную площадку.

Сечение струйки, которое нормально в каждой своей точке к линиям тока, называется **живым сечением струйки**. В зависимости от конечности или бесконечной малости, площадь струйки принято обозначать, соответственно, ω и $d\omega$.

Некоторый объем жидкости, который проходит через живое сечение в единицу времени, называют **расходом струйки** Q.

17a 17. Ламинарное движение

Это движение, называют также **потенциальным** (безвихревым) движением.

При таком движении отсутствует вращение частиц вокруг мгновенных осей, которые проходят через полюсы жидких частиц. По этой причине:

$$\upsilon_x = 0;\ \upsilon_y = 0;\ \upsilon_z = 0. \qquad (1)$$

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0.$$

Выше отмечалось, что при движении жидкости происходит не только изменение положения частиц в пространстве, но и их деформация по линейным параметрам. Если рассмотренное выше вихревое движение является следствием изменения пространственного положения жидкой частицы, то **ламинарное (потенциальное, или безвихревое) движение** является следствием деформационных явлений линейных параметров, например, формы и объема.

Вихревое движение определялось направлением вихревого вектора

$$\vec{\theta} = 2\vec{\upsilon}, \qquad (2)$$

где υ — угловая скорость, которая является характеристикой угловых деформаций.

Деформацию этого движения характеризуют деформацией этих компонентов

$$\frac{\upsilon I_x}{\upsilon_x};\ \frac{\upsilon I_y}{\upsilon_y};\ \frac{\upsilon I_z}{\upsilon_z}. \qquad (3)$$

18a 18. Потенциал скорости и ускорение при ламинарном движении

$$\varphi = \varphi(x, y, z) \qquad (1)$$

Функция φ называется **потенциалом скорости**. С учетом этого, компоненты φ выглядят следующим образом:

$$I_y = -\frac{\upsilon\varphi}{\upsilon x};\ I_y = -\frac{\upsilon\varphi}{\upsilon y};\ I_z = -\frac{\upsilon\varphi}{\upsilon z}. \qquad (2)$$

Формулой (1) описывается неустановившееся движение,поскольку она содержит параметр t.

Ускорение при ламинарном движении

Ускорение движения жидкой частицы имеет вид:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\upsilon u}{\upsilon t} + \frac{\upsilon i}{\upsilon x}\times\frac{du}{dt} + \frac{\upsilon i}{\upsilon y}\times\frac{du}{dt} + \frac{\upsilon i}{\upsilon z}\times\frac{du}{dz}, \qquad (3)$$

где du/dt — полные производные по времени.

Ускорение можно представить в таком виде, исходя из $\frac{dx}{dt} = ix$; $\frac{dy}{dt} = iy$; $\frac{dz}{dt} = iz$. Составляющие искомого ускорения

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{du_x}{dt} = \frac{\upsilon u_x}{\upsilon t}\right\} + \frac{\upsilon u_x}{\upsilon x} i_x + \frac{\upsilon u_x}{\upsilon y} iy + \frac{\upsilon u_x u_z}{\upsilon z},\\
&\left\{\frac{du_y}{dt} = \frac{\upsilon u_y}{\upsilon t}\right\} + \frac{\upsilon u_y}{\upsilon x} i_x + \frac{\upsilon u_y}{\upsilon y} iy + \frac{\upsilon u_y u_z}{\upsilon z}, \qquad (4)\\
&\left\{\frac{du_z}{dt} = \frac{\upsilon u_z}{\upsilon t}\right\} + \frac{\upsilon u_z}{\upsilon x} i_x + \frac{\upsilon u_z}{\upsilon y} iy + \frac{\upsilon u_z u_z}{\upsilon z}.
\end{aligned}$$

19a 19. Уравнение неразрывности жидкости

Довольно часто при решении задач приходится определять неизвестные функции типа:

1) $p = p\ (x, y, z, t)$ — давление;
2) $n_x(x, y, z, t)$, $n_y(x, y, z, t)$, $n_z(x, y, z, t)$ — проекции скорости на оси координат x, y, z;
3) $\rho\ (x, y, z, t)$ — плотность жидкости.

Эти неизвестные, всего их пять, определяют по системе уравнений Эйлера.

Количество уравнений Эйлера всего три, а неизвестных, как видим, пять. Не хватает еще двух уравнений для того, чтобы определить эти неизвестные. Уравнение неразрывности является одним из двух недостающих уравнений. В качестве пятого уравнения используют уравнение состояния сплошной среды.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} - \rho\left(\frac{\partial Ux}{\partial x} + \frac{\partial Uy}{\partial y} + \frac{\partial Uz}{\partial z}\right) = 0. \qquad (1)$$

Формула (1) является уравнением неразрывности, то есть искомое уравнение для общего случая. В случае несжимаемости жидкости $\partial\rho/dt = 0$, поскольку $\rho =$ = const, поэтому из (1) следует:

$$\frac{\partial Ux}{\partial x} + \frac{\partial Uy}{\partial y} + \frac{\partial Uz}{\partial z} = 0, \qquad (2)$$

поскольку эти слагаемые, как известно из курса высшей математики, являются скоростью изменения длины единичного вектора по одному из направлений X, Y, Z.

20a 20. Характеристики потока жидкости

В гидравлике **потоком** считают такое движение массы, когда эта масса ограничена:

1) твердыми поверхностями;
2) поверхностями, которые разделяют разные жидкости;
3) свободными поверхностями.

В зависимости от того, какого рода поверхностями или их сочетаниями ограничена движущаяся жидкость, различают следующие **виды потоков**:

1) безнапорные, когда поток ограничен сочетанием твердой и свободной поверхностей, например, река, канал, труба с неполным сечением;
2) напорные, например, труба с полным сечением;
3) гидравлические струи, которые ограничены жидкой (как мы увидим позже, такие струйки называют затопленными) или газовой средой.

Живое сечение и гидравлический радиус потока. Уравнение неразрывности в гидравлической форме

Сечение потока, с которого все линии тока нормальны (т. е. перпендикулярны), называется **живым сечением**.

Чрезвычайно важное значение имеет в гидравлике понятие о гидравлическом радиусе

$$R = \frac{\omega}{\chi}. \qquad (1)$$

Для напорного потока с круглым живым сечением, диаметром d и радиусом r_0, гидравлический радиус выражается

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\pi d^2}{4\pi d} = \frac{d}{4}. \qquad (2)$$

18б Формула (4) содержит в себе информацию о полном ускорении.

Слагаемые $\upsilon u_x/\upsilon t$, $\upsilon u_y/\upsilon t$, $\upsilon u_z/\upsilon t$, называют **местными ускорителями** в рассматриваемой точке, которыми характеризуются законы изменения поля скоростей.

Если движение установившееся, то

$$\frac{\upsilon u_x}{\upsilon t} = \frac{\upsilon u_y}{\upsilon t} = \frac{\upsilon u_z}{\upsilon t} = 0.$$

Само поле скоростей может быть названо **конвекцией**. Поэтому остальные части сумм, соответствующие каждой строке (4), называют **конвективными ускорениями**. Точнее, проекциями **конвективного ускорения**, которое характеризует неоднородность поля скоростей (или конвекций) в конкретный момент времени *t*.

Само полное ускорение можно назвать некоторой субстанцией, которая является суммой проекций du_x/dt, du_y/dt, du_z/dt,

17б Но, поскольку при ламинарном движении $\upsilon_x = \upsilon_y = \upsilon_z = 0$, то:

$$\frac{dh_x}{dy} = \frac{\upsilon u_y}{\upsilon x},\quad \frac{\upsilon l_x}{\upsilon z} = \frac{\upsilon u_z}{\upsilon x},\quad \frac{\upsilon l_y}{\upsilon z} = \frac{\upsilon u_z}{\upsilon y}. \qquad (4)$$

Из этой формулы видно: поскольку существуют частные производные, связанные между собой в формуле (4), то эти частные производные принадлежат некоторой функции.

20б При выводе (2) учли

$$\omega = \pi\left(\frac{r_0}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4};\ x = \pi d. \qquad (3)$$

Расход потока — это такое количество жидкости, которое проходит через живое сечение за единицу времени.

Для потока, состоящего из элементарных струек, расход:

$$Q = \int_\omega dQ = \int_\omega U d\omega, \qquad (4)$$

где $dQ = d\omega$ — расход элементарного потока;
U — скорость жидкости в данном сечении.

$$Q = uw.$$

19б Что касается всей суммы в (2), то она выражает скорость относительного изменения объема *dV*. Это объемное изменение называют по-разному: объемным расширением, дивергенцией, расхождением вектора скоростей.

Для струйки уравнение будет иметь вид:

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial l} + \frac{v(\rho\omega)}{\partial t} = 0, \qquad (3)$$

где Q — количество жидкости (расход);
ω — угловая скорость струйки;
∂l — длина элементарного участка рассматриваемой струйки.

Если давление установившееся или площадь живого сечения ω = const, то $\partial\omega/\partial t = 0$, т. е. согласно (3), $\rho\partial Q/\partial l = 0$, следовательно,

$$\frac{\partial Q}{\partial l} = 0. \qquad (4)$$

21а

21. Разновидность движения

В зависимости от характера изменения поля скоростей различают следующие виды установившегося движения:

1) **равномерное,** когда основные характеристики потока — форма и площадь живого сечения, средняя скорость потока, в том числе по длине, глубине потока (если движение безнапорное), — постоянны, не изменяются; кроме того, по всей длине потока вдоль линии тока местные скорости одинаковы, а ускорений вовсе нет;
2) **неравномерное,** когда ни один из перечисленных для равномерного движения факторов не выполняется, в том числе и условие параллельности линий токов.

   Существует плавно изменяющееся движение, которое все же считают неравномерным движением; при таком движении предполагают, что линии тока примерно параллельны, и все остальные изменения происходят плавно. Поэтому, когда направление движения и ось OX сонаправлены, то пренебрегают некоторыми величинами

$$Ux \approx U;\ Uy = Uz = 0. \qquad (1)$$

   Уравнение неразрывности (1) для плавно изменяющегося движения имеет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \qquad (2)$$

   аналогично для остальных направлений.

   Поэтому такого рода движение называют равномерным прямолинейным;

22а

22. Дифференциальные уравнения движения невязкой жидкости

Уравнение Эйлера служит одним из фундаментальных в гидравлике, наряду с уравнением Бернулли и некоторыми другими.

Изучение гидравлики как таковой практически начинается с уравнения Эйлера, которое служит исходным пунктом для выхода на другие выражения.

Попробуем вывести это уравнение. Пусть имеем бесконечно малый параллелепипед с гранями $dxdydz$ в невязкой жидкости с плотностью ρ. Он заполнен жидкостью и движется как составная часть потока. Какие силы действуют на выделенный объект? Это силы массы и силы поверхностных давлений, которые действуют на $dV = dxdydz$ со стороны жидкости, в которой находится выделенный dV. Как силы массы пропорциональны массе, так и поверхностные силы пропорциональны площадям, на которые оказывается давление. Эти силы направлены к граням вовнутрь по нормали. Определим математическое выражение этих сил.

Назовем, как и при получении уравнения неразрывности, грани параллелепипеда:

1, 2 — перпендикулярные к оси O_X и параллельные оси O_Y;

3, 4 — перпендикулярные к оси O_Y и параллельные оси O_X;

5, 6 — перпендикулярные к оси O_Z и параллельные оси O_X.

Теперь нужно определить, какая сила приложена к центру масс параллелепипеда.

23а

23. Уравнение Эйлера для разных состояний

Уравнение Эйлера для разных состояний имеет разные формы записи. Поскольку само уравнение получено для общего случая, то рассмотрим несколько случаев:

1) **движение неустановившееся.**

$$\begin{cases} Fx - \dfrac{1}{\rho} \times \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = \dfrac{\partial Ux}{dt} + \dfrac{\partial Ux}{\partial x} Ux + \dfrac{\partial Ux}{\partial y} Uy + \dfrac{\partial Ux}{\partial z} Uz \\ Fy - \dfrac{1}{\rho} \times \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = \dfrac{\partial Uy}{dt} + \dfrac{\partial Uy}{\partial x} Ux + \dfrac{\partial Uy}{\partial y} Uy + \dfrac{\partial Uy}{\partial z} Uz \\ Fz - \dfrac{1}{\rho} \times \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = \dfrac{\partial Uz}{dt} + \dfrac{\partial Uz}{\partial x} Ux + \dfrac{\partial Uz}{\partial y} Uy + \dfrac{\partial Uz}{\partial z} Uz \end{cases};$$

2) **жидкость в покое.** Следовательно, $Ux = Uy = Uz = 0$. В таком случае уравнение Эйлера превращается в уравнение равномерной жидкости. Это уравнение также дифференциальное и является системой из трех уравнений;
3) **жидкость невязкая.** Для такой жидкости уравнение движения имеет вид:

$$Fl - \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial \rho}{\partial l} = \frac{dU}{dt},$$

где Fl — проекция плотности распределения сил массы на направление, по которому направлена касательная к линии тока;

dU/dt — ускорение частицы.

24а

24. Форма Громеки уравнения движения невязкой жидкости

Уравнения Громеки — попросту другая, несколько преобразованная форма записи уравнения Эйлера. Например, для координаты x.

$$Fx - \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial Ux}{dt} + \frac{\partial Ux}{\partial x} Ux + \frac{\partial Ux}{\partial y} Uy + \frac{\partial Ux}{\partial z} Uz. \qquad (1)$$

Чтобы его преобразовать, используют уравнения компонентов угловой скорости для вихревого движения.

Преобразовав точно так же y-вую и z-вую компоненту, окончательно приходим к форме Громеко уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} Fx - \dfrac{1}{\rho} \times \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = \dfrac{\partial Ux}{dt} + \dfrac{\partial}{\partial x} \times \dfrac{U^2}{2} + 2(Uz^{\omega}{}_{y} - Uy^{\omega}{}_{z}) \\ Fy - \dfrac{1}{\rho} \times \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = \dfrac{\partial Uy}{dt} + \dfrac{\partial}{\partial y} \times \dfrac{U^2}{2} + 2(Ux^{\omega}{}_{z} - Uz^{\omega}{}_{x}) \\ Fz - \dfrac{1}{\rho} \times \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = \dfrac{\partial Uz}{dt} + \dfrac{\partial}{\partial z} \times \dfrac{U^2}{2} + 2(Uy^{\omega}{}_{x} - Ux^{\omega}{}_{y}) \end{cases}. \qquad (2)$$

Уравнение Эйлера было получено российским ученым **Л. Эйлером** в 1755 г., и преобразовано в вид (2) опять же российским ученым **И. С. Громекой** в 1881 г.

22б Сила, приложенная к центру массы параллелепипеда, которая и заставляет эту жидкость совершать движение, есть сумма найденных сил, то есть

$$Fx\,\rho dxdydz - \frac{\partial \rho}{\partial x}dxdydz = \rho dxdydz\,\frac{dUx}{dt}. \qquad (1)$$

Получили уравнение движения параллелепипеда с dV_1 по направлению оси X.

Делим (1) на массу $\rho dxdydz$:

$$\begin{cases} Fx - \frac{1}{\rho}\times\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{dUx}{dt} \\ Fy - \frac{1}{\rho}\times\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{dUy}{dt} \\ Fz - \frac{1}{\rho}\times\frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{dUz}{dt} \end{cases}. \qquad (2)$$

Полученная система уравнений (2) есть искомое уравнение движения невязкой жидкости — **уравнение Эйлера**.

К трем уравнениям (2) добавляются еще два уравнения, поскольку неизвестных пять, и решается система из пяти уравнений с пятью неизвестными: одним из двух дополнительных уравнений является **уравнение неразрывности**. Еще одним уравнением является **уравнение состояния**. Например, для несжимаемой жидкости уравнением состояния может быть условие ρ = const.

Уравнение состояния должно быть выбрано таким образом, чтобы оно содержало хотя бы одно из пяти неизвестных.

21б 3) если движение нестационарное или неустановившееся, когда местные скорости с течением времени изменяются, то в таком движении различают следующие разновидности: **быстро изменяющееся движение, медленно изменяющееся движение**, или, как часто его называют, **квазистационарное**.

Давление разделяют в зависимости от количества координат в описывающих его уравнениях, на: пространственное, когда движение трехмерное; плоское, когда движение двухмерное, т. е. Ux, Uy или Uz равна нулю; одномерное, когда движение зависит только от одной из координат.

В заключение отметим следующее уравнение неразрывности для струйки, при условии, что жидкость несжимаемая, т. е. ρ = const, для потока это уравнение имеет вид:

$$Q = v_1\omega_1 = v_2\omega_2 = \ldots = v_i\omega_i = \text{idem}, \qquad (3)$$

где $v_i\,\omega_i$ — скорость и площадь одного и того же сечения с номером i.

Уравнение (3) называют **уравнением неразрывности в гидравлической форме**.

24б Уравнение Громеко (под воздействием массовых сил на жидкость):

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{U^2}{2}\right) = \frac{\partial Ux}{dt} + 2(Uz^{\omega}{}_{y} - Uy^{\omega}{}_{z}) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{U^2}{2}\right) = \frac{\partial Uy}{dt} + 2(Ux^{\omega}{}_{z} - Uz^{\omega}{}_{x}) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{U^2}{2}\right) = \frac{\partial Uz}{dt} + 2(Uy^{\omega}x - Ux^{\omega}{}_{y}) \end{cases}. \qquad (3)$$

Поскольку

$$-d\Pi = Fxdx + Fydy + Fzdz, \qquad (4)$$

то для компонентов Fy, Fz можно вывести те же выражения, что и для Fx, и, подставив это в (2), прийти к (3).

23б Подставив $U = dl/dt$ в (2) и учтя, что $(\partial U/\partial l)U = 1/2(\partial U^2/\partial l)$, получим уравнение.

Мы привели три формы уравнения Эйлера для трех частных случаев. Но это не предел. Главное — правильно определить уравнение состояния, которое содержало хотя бы один неизвестный параметр.

Уравнение Эйлера в сочетании с уравнением неразрывности может быть применено для любого случая.

Уравнение состояния в общем виде:

$$\frac{\partial Ux}{\partial x} + \frac{\partial Uy}{\partial y} + \frac{\partial Uy}{\partial z} = 0. \qquad (3)$$

Таким образом, для решения многих гидродинамических задач оказывается достаточно уравнения Эйлера, уравнения неразрывности и уравнения состояния.

С помощью пяти уравнений легко находятся пять неизвестных: p, Ux, Uy, Uz, ρ.

Невязкую жидкость можно описать и другим уравнением.

25а

25. Уравнение Бернулли

Уравнение Громеки подходит для описания движения жидкости, если компоненты функции движения содержат какую-то вихревую величину. Например, эта вихревая величина содержится в компонентах ω_x, ω_y, ω_z угловой скорости w.

Условием того, что движение является установившимся, является отсутствие ускорения, то есть условие равенства нулю частных производных от всех компонентов скорости:

$$\frac{\partial Ux}{dt}=\frac{\partial Uy}{dt}=\frac{\partial Uz}{dt}=0. \qquad (1)$$

Если теперь сложить $\frac{\partial Ux}{dt}+\frac{\partial Uy}{dt}+\frac{\partial Uz}{dt}$, то получим $\frac{\partial Ux}{dt}=0$, что и есть равенство ускорения. Условием невязкой несжимаемой жидкости является:

1) отсутствие трения (внутри жидкости);
2) постоянство (однородности) плотности ρ = const.

С учетом (1), следует:

$$\begin{cases}\frac{\partial}{dx}\left(-\Pi-\frac{p}{\rho}-\frac{U^2}{2}\right)=2(Uz^{\omega}{}_y-Uy^{\omega}{}_z)\\ \frac{\partial}{dy}\left(-\Pi-\frac{p}{\rho}-\frac{U^2}{2}\right)=2(Ux^{\omega}{}_z-Uz^{\omega}{}_x)\\ \frac{\partial}{dz}\left(-\Pi-\frac{p}{\rho}-\frac{U^2}{2}\right)=2(Uy^{\omega}{}_x-Ux^{\omega}{}_y)\end{cases}. \qquad (2)$$

26а

26. Анализ уравнения Бернулли

$$\frac{dx}{Ux}=\frac{dy}{Uy}=\frac{dz}{Uz} — \qquad (1)$$

это уравнение есть не что иное, как уравнение линии тока при установившемся движении.

Отсюда следуют выводы:

1) если движение установившееся, то первая и третья строки в уравнении Бернулли пропорциональны.
2) пропорциональны строки 1 и 2, т. е.

$$\frac{dx}{\omega x}=\frac{dy}{\omega y}=\frac{dz}{\omega z}. \qquad (2)$$

Уравнение (2) является уравнением вихревой линии. Выводы из (2) аналогичны выводам из (1), только линии тока заменяют вихревые линии. Одним словом, в этом случае условие (2) выполняется для вихревых линий;

3) пропорциональны соответствующие члены строк 2 и 3, т. е.

$$\frac{\omega x}{Ux}=\frac{\omega y}{Uy}=\frac{\omega z}{Uz}=\text{const}=a, \qquad (3)$$

где a — некоторая постоянная величина; если подставить (3) в (2), то получим уравнение линий тока (1), поскольку из (3) следует:

$$\omega_x = aUx;\ \omega_y = aUy;\ \omega_z = aUz. \qquad (4)$$

27а

27. Примеры прикладного применения уравнения Бернулли

Во всех случаях требуется определить математическую формулу потенциальной функции, которая входит в уравнение Бернулли: но эта функция имеет разные формулы в разных ситуациях. Ее вид зависит от того, какие массовые силы действуют на рассматриваемую жидкость. Поэтому рассмотрим две ситуации.

Одна массовая сила

В этом случае подразумевается сила тяжести, которая выступает в качестве единственной массовой силы. Очевидно, что в этом случае ось Z и плотность распределения Fz силы Π противонаправлены, следовательно,

$$Fx = Fy = 0;\ Fz = -g.$$

Поскольку $-d\Pi = Fxdx + Fydy + Fzdz$, то $-d\Pi = Fzdz$, окончательно $d\Pi = -gdz$.

Интегрируем полученное выражение:

$$\Pi = -gz + C, \qquad (1)$$

где C — некоторая постоянная.

Подставив (1) в уравнение Бернулли, имеем выражение для случая воздействия на жидкость только одной массовой силы:

$$gz+\frac{p}{\rho}+\frac{U^2}{2}=\text{const}. \qquad (2)$$

28а

28. Случаи, когда массовых сил несколько

В этом случае усложним задачу. Пусть на частицы жидкости действуют следующие силы: сила тяжести; центробежная сила инерции (переносит движение от центра); кориолисовая сила инерции, которая заставляет частицы вращаться вокруг оси Z с одновременным поступательным движением.

В этом случае мы получили возможность представить себе винтовое движение. Вращение происходит с угловой скоростью w. Нужно представить себе криволинейный участок некоторого потока жидкости, на этом участке поток как бы вращается вокруг некоторой оси с угловой скоростью.

Частным случаем такого потока можно считать гидравлическую струю. Вот и рассмотрим элементарную струйку жидкости и применим в отношении к ней уравнение Бернулли. Для этого поместим элементарную гидравлическую струю в координатную систему XYZ таким образом, чтобы плоскость YOX вращалась вокруг оси O_Z.

Будем считать, что $\vec{U}$ — местная скорость жидкости во вращающейся плоскости YOX. Пусть

$$Fx_1 = Fy_1 = 0;\ Fz_1 = -g —$$

составляющие силы тяжести (то есть ее проекции на оси координат), отнесенные к единичной массе жидкости. К этой же массе приложена вторая сила — сила инерции $\omega^2 r$, где r — расстояние от частицы до оси вращения ее компоненты.

$$Fx_2 = \omega^2 x;\ Fy_2 = \omega^2 y;\ Fz_2 = 0$$

из-за того, что ось O_Z «не вращается».

26б Здесь следует интересный вывод о том, что векторы линейной скорости $\vec{U}$ и угловой скорости $\vec{\omega}$ сонаправлены, то есть параллельны.

В более широком понимании надо представить себе следующее: так как рассматриваемое движение установившееся, то получается, что частицы жидкости движутся по спирали и их траектории по спирали образуют линии тока. Следовательно, линии тока и траектории частиц — одно и то же. Движение такого рода называют **винтовым**.

4) вторая строка определителя (точнее, члены второй строки) равна нулю, т. е.

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0. \qquad (5)$$

Но отсутствие угловой скорости равносильно отсутствию вихревости движения.

5) пусть строка 3 равна нулю, т. е.

$$Ux = Uy = Uz = 0.$$

Но это, как нам уже известно, условие равновесия жидкости.

Анализ уравнения Бернулли завершен.

25б Если проецировать перемещение на бесконечно малую величину dl на координатные оси, то получим:

$$dx = Uxdt;\ dy = Uydt;\ dz = Uzdt. \qquad (3)$$

Теперь помножим каждое уравнение (3) соответственно на dx, dy, dz, и сложим их:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\Pi - \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2}\right)dx = 2(Uz^{\omega}{}_{y} - Uy^{\omega}z)dx. \qquad (4)$$

Предположив, что правая часть равна нулю, а это возможно, если вторая или третья строки равны нулю, получим:

$$d\left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2}\right) = 0. \qquad (5)$$

Нами получено уравнение Бернулли.

28б Окончательно уравнение Бернулли. Для рассматриваемого случая:

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} - \frac{\omega^2 r^2}{2} = \text{const}.$$

Или, что одно и то же, после деления на g

$$z + \frac{p}{g\rho} + \frac{U^2}{2g} - \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \text{const}.$$

Если рассмотреть два сечения элементарной струйки, то, применив вышеуказанный механизм, легко убедиться, что

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{U_1^2}{2g} - \frac{\omega^2 r_1^2}{2g} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{U_2^2}{2g} - \omega^2 r_2^2,$$

где z_1, h_1, U_1, V_1, z_2, h_2, U_2, V_2 — параметры соответствующих сечений.

27б Если разделить уравнение (2) на g (поскольку оно постоянное), то

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} = \text{const}. \qquad (3)$$

Мы получили одну из самых часто применяемых в решении гидравлических задач формул, поэтому следует ее запомнить особенно хорошо.

Если требуется определить расположение частицы в двух разных положениях, то выполняется соотношение для координат Z_1 и Z_2, характеризующие эти положения

$$gZ_1 + \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} = gZ_2 + \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2}. \qquad (4)$$

Можно переписать (4) в другой форме:

$$Z_1 + \frac{p}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} = Z_2 + \frac{p}{\rho g} + \frac{U^2}{2g}. \qquad (5)$$

29a 29. Энергетический смысл уравнения Бернулли

Пусть теперь имеем установившееся движение жидкости, которая невязкая, несжимаемая.

И пусть она находится под воздействием сил тяжести и давления, тогда уравнение Бернулли имеет вид:

$$z+\frac{p}{\rho g}+\frac{U^2}{2g}=\text{const}.$$

Теперь требуется идентифицировать каждое из слагаемых. Потенциальная энергия положения Z — это высота элементарной струйки над горизонтальной плоскостью сравнения. Жидкость с массой M на высоте Z от плоскости сравнения имеет некоторую потенциальную энергию MgZ. Тогда

$$Z=\frac{MgZ}{Mg}.$$

Это та же потенциальная энергия, отнесенная к единичной массе. Поэтому Z называют удельной потенциальной энергией положения.

Движущаяся частица с массой M и скоростью u имеет вес MG и кинематическую энергию $U^2/2g$. Если соотнести кинематическую энергию с единичной массой, то

$$M\frac{U^2}{2}=\frac{U^2}{2}.$$

30a 30. Геометрический смысл уравнения Бернулли

Основу теоретической части такой интерпретации составляет гидравлическое понятие **напор**, которое принято обозначать буквой H, где

$$H=z+\frac{p}{\rho g}+\frac{U^2}{2g}. \qquad (1)$$

Гидродинамический напор H состоит из следующих разновидностей напоров, которые входят в формулу (198) как слагаемые:

1) пьезометрический напор, если в (198) $p = p_{изг}$, или гидростатический, если $p \neq p_{изг}$;
2) $U^2/2g$ — скоростной напор.

Все слагаемые имеют линейную размерность, их можно считать высотами. Назовем эти высоты:

1) z — геометрическая высота, или высота по положению;
2) $p/\rho g$ — высота, соответствующая давлению p;
3) $U^2/2g$ — скоростная высота, соответствующая скорости.

Геометрическое место концов высоты H соответствует некоторой горизонтальной линии, которую принято называть **напорной линией** или **линией удельной энергии**.

Точно так же (по аналогии) геометрические места концов пьезометрического напора принято называть пьезометрической линией. Напорная и **пьезометрическая линии** расположены друг от друга на расстоянии (высоте) $p_{атм}/\rho g$, поскольку $p = p_{изг} + p_{ат}$, т. е.

$$\frac{p}{\rho g}=\frac{p_{изг}}{\rho g}+\frac{p_{атм}}{\rho g}. \qquad (2)$$

31a 31. Уравнения движения вязкой жидкости

Для получения уравнения движения вязкой жидкости рассмотрим такой же объем жидкости $dV = dxdydz$, который принадлежит вязкой жидкости (рис. 1).

Грани этого объема обозначим как 1, 2, 3, 4, 5, 6.

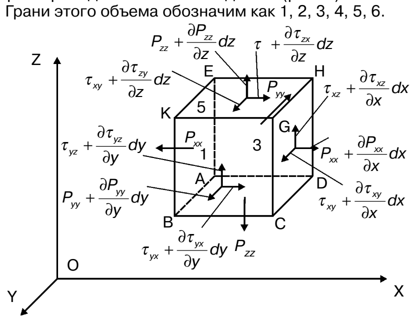

Рис. 1. Силы, действующие на элементарный объем вязкой жидкости в потоке

Будем считать, что для любой точки жидкости

$$\tau_{xy}=\tau_{yx};\ \tau_{xz}=\tau_{zx};\ \tau_{yz}=\tau_{zy}. \qquad (1)$$

Тогда из шести касательных напряжений остается только три, поскольку попарно они равны. Поэтому для описания движения вязкой жидкости оказывают-

32a 32. Деформация в движущейся вязкой жидкости

В вязкой жидкости имеются силы трения, в силу этого при движении один слой тормозит другой. В итоге возникает сжатие, деформация жидкости. Из-за этого свойства жидкость и называют вязкой.

Если вспомнить из механики закон Гука, то по нему напряжение, которое возникает в твердом теле, пропорционально соответствующей относительной деформации. Для вязкой жидкости относительную деформацию заменяет скорость деформации. Речь идет об угловой скорости деформации частицы жидкости $d\Theta/dt$, которую по-другому называют скоростью деформации сдвига. Еще Исааком Ньютоном установлена закономерность о пропорциональности силы внутреннего трения, площади соприкосновения слоев и относительной скорости слоев. Также им был установлен

$$\tau=\mu\frac{\Theta}{dt}\text{ —} \qquad (1)$$

коэффициент пропорциональности динамической вязкости жидкости.

Если выразить касательное напряжение через его компоненты, то

$$\begin{cases}\tau_{xy}=\mu\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial x}+\dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right),\\ \tau_{xz}=\mu\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial x}+\dfrac{\partial u_x}{\partial z}\right),\\ \tau_{yz}=\mu\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial y}+z\right).\end{cases} \qquad (2)$$

30б Отметим, что горизонтальная плоскость, содержащая напорную линию и находящаяся над плоскостью сравнения, называется **напорной плоскостью**. Характеристику плоскости при разных движениях называют **пьезометрическим уклоном $J_п$**, который показывает, как изменяется на единице длины пьезометрический напор (или пьезометрическая линия):

$$J_п = -\frac{d}{dl}\left(z + \frac{P}{\rho g}\right). \qquad (3)$$

Пьезометрический уклон считается положительным, если он по течению струйки (или потока) уменьшается, отсюда и знак минус в формуле (3) перед дифференциалом. Чтобы $J_п$ остался положительным, должно выполняться условие

$$\frac{d}{dl}\left(z + \frac{P}{\rho g}\right) < 0. \qquad (4)$$

29б Полученное выражение есть не что иное, как последнее, третье слагаемое в уравнении Бернулли. Следовательно, $U^2/2$ — это удельная кинетическая энергия струйки. Таким образом, общий энергетический смысл уравнения Бернулли таков: уравнение Бернулли представляет собой сумму, содержащую в себе полную удельную энергию сечения жидкости в потоке:

1) если полная энергия соотнесена с единичной массой, то она есть сумма $gz + p/\rho + U^2/2$;
2) если полная энергия соотнесена с единичным объемом, то $\rho gz + p + \rho U^2/2$;
3) если полная энергия соотнесена единичному весу, то полная энергия есть сумма $z + p/\rho g + U^2/2g$. Не следует забывать, что удельная энергия определяется относительно плоскости сравнения: эта плоскость выбирается произвольно и горизонтально. Для любой пары точек, произвольно выбранной из потока, в котором установившееся движение и который движется потенциально-вихрево, а жидкость невязконесжимаемая, суммарная и удельная энергия одинаковы, то есть распределены по потоку равномерно.

32б А что касается нормальных напряжений (τ — это касательная составляющая деформации), которые зависимы от направления действия, то они зависят также от того, к какой площади они приложены. Это их свойство называют **инвариантностью**.

Сумма значений нормальных напряжений

$$p = \frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3}. \qquad (3)$$

Чтобы окончательно установить зависимость между $pud\Theta/dt$ через зависимость между нормальными (p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}) и касательными ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{yx} = \tau_{xy}$; $\tau_{zx} = \tau_{xz}$), представив из (3)

$$p_{xx} = -p + p'_{xx}, \qquad (4)$$

где p'_{xx} — добавочные нормальные напряжения, которые и зависят от направления воздействия, по аналогии с формулой (4) получим:

$$p'_{xx} = 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial x}. \qquad (5)$$

Сделав то же самое для компонентов p_{yy}, p_{zz}, получили систему.

31б ся достаточными всего шесть независимых компонентов:

$$p_{xx},\ p_{yy},\ p_{zz},\ \tau_{xy}\ (\text{или}\ \tau_{yx}),\ \tau_{xz}\ (\tau_{zx}),\ \tau_{yz}(\tau_{zy}).$$

$$\rho Fx + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho\frac{dUx}{dt}.$$

Аналогичное уравнение легко можно получить для осей O_Y и O_Z; объединив все три уравнения в систему, получим (предварительно разделив на ρ):

$$\begin{cases} Fx\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) = \dfrac{dUx}{dt} \\ Fy\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) = \dfrac{dUy}{dt} \\ Fz\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right) = \dfrac{dUz}{dt} \end{cases}.$$

Полученную систему называют **уравнением движения вязкой жидкости в напряжениях**.

33а

33. Уравнение Бернулли для движения вязкой жидкости

Элементарная струйка при установившемся движении вязкой жидкости

Уравнение для этого случая имеет вид (приводим его без вывода, поскольку его вывод сопряжен с применением некоторых операций, приведение которых усложнило бы текст):

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{U_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{U_2^2}{2g} + h_{Пр}. \quad (1)$$

Потеря напора (или удельной энергии) $h_{Пр}$ — результат того, что часть энергии превращается из механической в тепловую. Поскольку процесс необратим, то имеет место потеря напора.

Этот процесс называется **диссипацией** энергии. Другими словами, $h_{Пр}$ можно рассматривать как разность между удельной энергией двух сечений, при движении жидкости от одного к другому происходит потеря напора. Удельная энергия — это энергия, которую содержит единичная масса.

Поток с установившимся плавно изменяющемся движением. Коэффициент удельной кинематической энергии *X*

Для того, чтобы получить уравнение Бернулли в этом случае, приходится исходить из уравнения (1), то есть из струйки надо переходить в поток. Но для этого нужно определиться, что представляет собой энергия потока (которая состоит из суммы потенциальной и кинематической энергий) при плавно изменяющемся потоке.

34а

34. Гидродинамический удар. Гидро- и пьезо- уклоны

В силу плавности движения жидкости для любой точки живого сечения потенциальная энергия $Еп = Z + p/\rho g$. Удельная кинетическая $E_k = X\upsilon^2/2g$. Поэтому для сечения 1—1 полная удельная энергия

$$E_1 = En + E_{к1} = Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{x_1\upsilon_1^2}{2g}. \quad (1)$$

Сумму правой части (1) также называют **гидродинамическим напором *H***. В случае невязкой жидкости $U^2 = x\upsilon^2$. Теперь остается учесть потери напора $h_{пр}$ жидкости при ее движении к сечению 2—2 (или 3—3). Например, для сечения 2—2:

$$E_2 = E_2 + + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{x_2\upsilon_2^2}{2g} + h_{пр}. \quad (2)$$

Следует отметить, что условие плавной изменяемости должно быть выполнено только в сечениях 1—1 и 2—2 (только в рассматриваемых): между этими сечениями условие плавной изменяемости необязательно.

В формуле (2) физический смысл всех величин приведен ранее.

В основном все так же, как и в случае с невязкой жидкостью, основная разница в том, что теперь напорная линия $E = H = Z + p/\rho g + X\upsilon^2/2g$ не параллельна к горизонтальной плоскости сравнения, поскольку имеет места потери напора.

35а

35. Уравнение Бернулли для неустановившегося движения вязкой жидкости

Для того, чтобы получить уравнение Бернулли, придется определить его для элементарной струйки при неустановившемся движении вязкой жидкости, а затем распространять его на весь поток.

Прежде всего, вспомним основное отличие неустановившегося движения от установившегося. Если в первом случае в любой точке потока местные скорости изменяются по времени, то во втором случае таких изменений нет.

Приводим уравнение Бернулли для элементарной струйки без вывода:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{U_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{U_2^2}{2g} + h_{пр} + h_{ин}. \quad (1)$$

$$(КД)_{\upsilon} = \rho\upsilon^2\omega —$$

здесь учтено, что $\upsilon\omega = Q$; $\rho Q = m$; $m\upsilon = (КД)_{\upsilon}$.

Так же, как и в случае с удельной кинетической энергией, считать $(КД)_{\upsilon}$ не так-то просто. Чтобы считать, нужно связать его с $(КД)_{\upsilon}$. Для этого служит коэффициент количества движения

$$a' = \frac{(КД)_u}{(КД)\upsilon} = \frac{1}{\omega}\int_{\omega}\left(\frac{u}{\upsilon}\right)^2 d\omega. \quad (3)$$

36а

36. Ламинарный и турбулентный режимы движения жидкости. Число Рейнольдса

Как нетрудно было убедиться в вышеприведенном опыте, если фиксировать две скорости в прямом и обратном переходах движения в режимы ламинарное → турбулентное, то

$$\upsilon_1 \neq \upsilon_2,$$

где υ_1 — скорость, при которой начинается переход из ламинарного в турбулентный режим;

υ_2 — то же самое при обратном переходе.

Как правило, $\upsilon_2 < \upsilon_1$. Это можно понять из определения основных видов движения.

Ламинарным (от лат. *lamina* — слой) считается такое движение, когда в жидкости нет перемешивания частиц жидкости; такие изменения в дальнейшем будем называть пульсациями.

Движение жидкости **турбулентное** (от лат. *turbulentus* — беспорядочный), если пульсация местных скоростей приводит к перемешиванию жидкости.

Скорости перехода υ_1, υ_2 называют:

υ_1 — **верхней критической скоростью** и обозначают как $\upsilon_{в.кр}$, это скорость, при которой ламинарное движение переходит в турбулентное;

υ_2 — **нижней критической скоростью** и обозначают как $\upsilon_{н.кр}$, при этой скорости происходит обратный переход от турбулентного к ламинарному.

Значение $\upsilon_{в.кр}$ зависит от внешних условий (термодинамические параметры, механические условия), а значения $\upsilon_{н.кр}$ не зависят от внешних условий и постоянны.

34б Степень потери напора $h_{пр}$ по длине называют **гидравлическим уклоном *J***. Если потеря напора $h_{пр}$ происходит равномерно, то

$$J=\frac{h_{пр}}{l}=\frac{\left(z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{x_1\upsilon_1^2}{2g}\right)-\left(\upsilon_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{x_2\upsilon_2^2}{2g}\right)}{l}. \quad (3)$$

Числитель в формуле (3) можно рассматривать как приращение напора dH на длине dl.

Поэтому в общем случае

$$J=\frac{dH}{dl}=-\frac{d}{dl}\left(Z+\frac{p}{\rho g}+\frac{X\upsilon}{2g}\right). \quad (4)$$

Знак минус перед dH/dl — потому, что изменение напора по его течению отрицательно.

Если рассмотреть изменение пьезометрического напора $Z + p/\rho g$, то величину (4) называют **пьезометрическим уклоном**.

Напорная линия, она же линия удельной энергии, находится выше пьезометрической линии на высоту $u^2/2g$: здесь то же самое, но только разница между этими линиями теперь равна $x\upsilon^2/2g$. Эта разница сохраняется также при безнапорном движении. Только в этом случае пьезометрическая линия совпадает со свободной поверхностью потока.

33б Разберемся с потенциальной энергией: при плавном изменении движения, если поток установившийся,

$$Ux\approx U;\ Uy\approx 0;\ Uz\approx 0;\ \frac{\partial u}{\partial t}=0. \quad (2)$$

Окончательно при рассматриваемом движении давление по живому сечению распределено согласно гидростатическому закону, т. е.

$$Z+\frac{p}{\rho g}=\text{const}. \quad (3)$$

$$E_{ku}=XE_k\upsilon, \quad (4)$$

где величину X называют **коэффициентом кинетической энергии, или коэффициентом Кориолиса**. Коэффициент X всегда больше 1. Из (4) следует:

$$E_{ku}=\frac{X\upsilon^2}{2g}. \quad (5)$$

36б Эмпирическим путем установлено, что:

$$\upsilon_{н.кр}=\frac{RV}{d},$$

где V — кинематическая вязкость жидкости;
d — диаметр трубы;
R — коэффициент пропорциональности.

В честь исследователя вопросов гидродинамики вообще и данного вопроса в частности, коэффициент, соответствующий uн.кр, называется **критическим числом Рейнольдса** $Re_{кр}$.

Если изменить V и d, то $Re_{кр}$ не изменяется и остается постоянным.

$$K=\frac{\upsilon_{н.кр}Л}{V}=2320=Re_{кр}.$$

Если $Re < Re_{кр}$, то режим движения жидкости **ламинарный**, поскольку $\upsilon < \upsilon_{кр}$; если $Re > Re_{кр}$, то режим движения **турбулентный** из-за того, что $\upsilon > \upsilon_{кр}$.

$$Re_d=\frac{\upsilon d}{V};\ Re_R=\frac{\upsilon R}{V};\ Re_h=\frac{\upsilon h}{V}.$$

35б Коэффициент a' принято называть еще и **коэффициентом Бусинеска**. С учетом a', средний инерционный напор по живому сечению

$$h_{ин}=\frac{a}{g}\times\frac{1}{\omega}\times\frac{dQ}{dt}. \quad (4)$$

Окончательно уравнение Бернулли для потока, получение которого и являлось задачей рассматриваемого вопроса имеет следующий вид:

$$Z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{x_1\upsilon_1^2}{2g}=Z_2+\frac{p_2}{\rho g}+h_{пр}+h_{ин}, \quad (5)$$

где

$$h_{ин}=\frac{x_1 l}{g}\times\frac{d\upsilon}{dt}. \quad (6)$$

Что касается (5), то оно получено из (4) с учетом того, что $dQ = wdu$; подставив dQ в (4) и сократив ω, приходим к (6).

Отличие $h_{ин}$ от $h_{пр}$ прежде всего в том, что оно не является необратимым. Если движение жидкости с ускорением, что значит $d\upsilon/t > 0$, то $h_{ин} > 0$. Если движение замедленное, то есть $du/t < 0$, то $h_{ин} < 0$.

Уравнение (5) связывает параметры потока только в данный момент времени. Для другого момента оно может уже оказаться не достоверным.

37а

37. Осредненные скорости. Пульсационные составляющие

В теории турбулентного движения очень многое связано с именем исследователя этого движения Рейнольдса. Рассматривая хаотическое турбулентное движение, он представил мгновенные скорости, как некоторые суммы. Эти суммы имеют вид:

$$u_x = \bar{u}_x + u'_x;\ u_y = \bar{u}_y + u'_y;\ u_z = \bar{u}_z + u'_z;\ p = \bar{\tau} + \tau';\quad (1)$$

где u_x, u_y, u_z — мгновенные значения проекций скорости;

p, τ — то же самое, но для напряжений давления и трения;

черта у величин наверху означает, что параметр усреднен по времени; у величин u'_x, u'_y, u'_z, p', τ' черта сверху означает, что имеется в виду пульсационная составляющая соответствующего параметра («добавка»).

Осреднение параметров по времени осуществляется по следующим формулам:

$$\bar{p} = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt,$$
$$u'_i = \frac{1}{T}\int_w^T u_i\,dt; \quad (2)$$

где $-\bar{\tau} = \frac{1}{T}\int_0^T \tau\,dt$ — интервал времени, в течение которого проводится осреднение.

38а

38. Средне квадратичное отклонение

Принят стандарт, который называется **среднеквадратическим отклонением**. Для *x*-ой компоненты соответствующее выражение этого стандарта:

$$\delta_{ux} = \sqrt{(\bar{u}'_x)^2}. \quad (1)$$

Чтобы получить формулу для любого параметра «добавки» из формулы (1), достаточно заменить u_x в (1) на искомый параметр.

Среднеквадратичное отклонение можно относить к следующим скоростям: усредненная местная скорость данной точки; средняя по вертикали; средняя по живому сечению; максимальная скорость.

Обычно максимальная и средняя по вертикали скорости не используются; используются две из вышеперечисленных характерных скорости. Кроме них, используют также динамическую скорость.

$$u_x = \sqrt{gRL}, \quad (2)$$

где R — гидравлический радиус;

J — гидравлический уклон.

Среднеквадратичное отклонение, отнесенное к средней скорости, есть, например, для *x*-ой компоненты:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_{ux}}{\upsilon}. \quad (3)$$

39а

39. Распределение скоростей при равномерном установившемся движении. Ламинарная пленка

Все же, несмотря на вышеперечисленные и другие особенности, о которых не сказано из-за их невостребованности, основным признаком турбулентного движения является перемешивание частиц жидкости. Принято об этом перемешивании с точки зрения количества говорить как о перемешивании молей жидкости.

Как мы убедились выше, с ростом числа *Re* интенсивность турбулентности не растет. Несмотря на это, все же, например, у внутренней поверхности трубы (или у любой другой твердой стенки) существует некоторый слой, в пределах которого все скорости, в том числе пульсационные «добавки», равны нулю: это очень интересное явление.

Этот слой принято называть **вязким подслоем потока**.

Само собой на границе соприкосновения с основной массой потока этот вязкий подслой все же имеет некоторую скорость. Следовательно, все изменения в основном потоке передаются и в подвязкий слой, но их значение очень мало. Это позволяет считать движение слоя ламинарным.

Ранее, считая, что эти передачи в подвязкий слой отсутствуют, слой назвали ламинарной пленкой. Теперь нетрудно убедиться, что с точки зрения современной гидравлики ламинарность движения в этом слое относительная (интенсивность ε в подвязком слое (ламинарной пленке) может достигать значения 0,3. Для ламинарного движения это достаточно большая величина).

40а

40. Распределение скоростей в «живом» сечении потока

Современной гидродинамике удалось разрешить эти проблемы, применив **метод статистического анализа**. Основным орудием этого метода является то, что исследователь выходит за рамки традиционных подходов и применяет для анализа некие средние по времени характеристики потока.

Усредненная скорость

Ясно, что в любой точке живого сечения любую мгновенную скорость и можно разложить на u_x, u_y, u_z компоненты.

Мгновенная скорость определяется по формуле:

$$\bar{u}_x = \frac{\int_0^t u_x\,dt}{t}.$$

Полученную скорость можно назвать **скоростью, усредненной по времени,** или **средней местной**, эта скорость u_x — фиктивно постоянная и позволяет судить о характеристике потока.

Вычислив $\bar{u}_y$, $\bar{u}_z$ можно получить вектор усредненной скорости:

$$\bar{u} = \sqrt{u_x + u_y + u_z}.$$

Касательные напряжения

$$\tau = \bar{\tau} + \tau',$$

38б Но лучшие результаты получаются, если среднеквадратичное отклонение относить к u_x, т. е. динамической скорости, например

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_{ux}}{u_x}. \qquad (4)$$

Определим степень (интенсивность) турбулентности, как называют величину е:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_{\upsilon x}}{\upsilon};\ \varepsilon_y = \frac{\delta_{\upsilon y}}{\upsilon};\ \varepsilon_z = \frac{\delta_{\upsilon z}}{\upsilon}. \qquad (5)$$

Однако лучшие результаты получаются, если за масштаб скорости (то есть за характерную скорость) взять динамическую скорость u_x.

Еще одним свойством турбулентности является частота пульсаций скорости. Средняя частота пульсации в точке с радиусом r от оси потока:

$$w_r = \frac{N}{T}, \qquad (6)$$

где N — половина экстремума вне кривой мгновенных скоростей;
T — период осреднения;
$T/N = 1/w$ — период пульсации.

37б Из формул (1) следует, что пульсируют не только проекции скорости, но и нормальные p и касательные τ напряжения. Значения усредненных во времени «добавок» должны быть равны нулю: например для x-ой компоненты:

$$\bar{u}'_x = \frac{1}{T}\int_0^T u'_x dt = 0. \qquad (3)$$

Интервал времени T определяют достаточным, чтобы при повторном осреднении значение «добавки» (пульсирующей составляющей) не изменилось.

Турбулентное движение считается неустановившимся движением. Несмотря на возможное постоянство осредненных параметров, мгновенные параметры все же пульсируют. Следует запомнить: осредненная (по времени и в конкретной точке) и средняя (в конкретном живом сечении) скорости — не одно и то же:

$$\bar{u}_i \neq \upsilon, \qquad (4)$$

где $\upsilon = Q/w$;
Q — расход жидкости, которая течет со скоростью υ через w.

40б определим и суммарное значение касательного напряжения τ. Поскольку это напряжение возникает из-за наличия сил внутреннего трения, то жидкость считают ньютоновой.

Если предположить, что площадь соприкосновения — единичная, то сила сопротивления

$$\tau = \mu\left(\frac{d\upsilon}{dy}\right),$$

где μ — динамическая вязкость жидкости;
$d\upsilon/dy$ — изменение скорости. Эту величину часто называют **градиентом скорости**, или **скоростью сдвига**.

В настоящее время руководствуются выражением, полученным в вышеупомянутом уравнении Прандтля:

$$\tau' = \rho l^2\left(\frac{d\upsilon}{dy}\right),$$

где ρ — плотность жидкости;
l — длина пути, на котором рассматривается движение.

Без вывода приводим окончательную формулу для пульсационной «добавки» касательного напряжения:

$$\tau' = \rho l^2\left(\frac{d\upsilon}{dy}\right)^2.$$

39б Подвязкий слой $\varepsilon_в$ очень тонкий по сравнению с основным потоком. Именно наличие этого слоя порождает потери напора (удельной энергии).

Что касается толщины ламинарной пленки $\delta_в$, то она обратно пропорциональна числу Re. Это более наглядно видно из следующего сравнения толщины в зонах потока при турбулентном движении.

Вязкий (ламинарный) слой — $0 < ua\ /\ V < 7$.

Переходная зона — $7 < ua/V < 70$.

Турбулентное ядро — $ua/V < 70$.

В этих соотношениях u — динамическая скорость потока, a — расстояние от твердой стенки, V — кинематическая вязкость.

Углубимся немного в историю теории турбулентности: эта теория включает в себя совокупность гипотез, на основании которых были получены зависимости между основными параметрами $\bar{u}_i$, $\bar{\tau}$ турбулентного движения потока.

У разных исследователей к этому вопросу были разные подходы. Среди них немецкий ученый **Л. Прандтль**, советский ученый **Л. Ландау** и многие другие.

Если до начала XX в. ламинарный слой, по мнению ученых, представлял собой некоторый мертвый слой, в переходе к которому (или от которого) происходит как бы разрыв скоростей, то есть скорость меняется скачкообразно, то в современной гидравлике совсем другая точка зрения.

Поток — это «живое» явление: все переходные процессы в нем носят непрерывный характер.

41а

41. «Шероховатость» и «гладкость» внутренних стенок трубы

Рассматривая выше механизм турбулентного движения, мы убедились: по мере удаления от оси потока к стенкам трубы скорость движения уменьшается, а у стенки вовсе равна нулю.

Дело в том, что у любой поверхности имеются неровности в разной степени, например, на дне канала. В трубах эти неровности предопределены технологией изготовления материала, из которого делают трубы.

По мере удаления от стенок к центру влияние неровностей на поток сходит на нет.

Именно эти неровности порождают явление, которое принято называть гидравлическим сопротивлением, а сами неровности в гидравлике называют шероховатостью.

Шероховатость может возникать и в результате естественного износа (ржавчина, отложения осадков и др.).

По величине и форме различают **однородную** и **неоднородную**, **регулярную** и **подвижную** шероховатости.

Если у неровностей геометрия и относительное расположение одинаковое, то шероховатость однородная, в противном случае — неоднородная. Регулярность шероховатости — понятие о периодичности расположения неровностей, об их повторяемости.

Если обозначить высоту выступа неровности Δ, то отношения $\varepsilon = \Delta/d$, Δ/h, где d — диаметр трубы, h — высота потока в открытом русле, называют относительной шероховатостью. Обратные отношения $\varepsilon = d/\Delta$, h/Δ называют **относительной гладкостью**.

42а

42. Параметры потока, от которых зависит потеря напора. Метод размерностей

Неизвестный вид зависимости определяется по методу размерностей. Для этого существует **π-теорема**: если некоторая физическая закономерность выражена уравнением, содержащим k размерных величин, причем оно содержит n величин с независимой размерностью, то это уравнение может быть преобразовано в уравнение, содержащее (k-n) независимых, но уже безразмерных комплексов.

Для чего определимся: от чего зависят потери напора при установившемся движении в поле сил тяжести.

Эти параметры.

1. **Геометрические размеры потока:**

1) характерные размеры живого сечения $l_1 l_2$;
2) длина рассматриваемого участка l;
3) углы, которыми завершается живое сечение;
4) свойства шероховатости: Δ — высота выступа и $l\Delta$ — характер продольного размера выступа шероховатости.

2. **Физические свойства:**

1) ρ — плотность;
2) μ — динамическая вязкость жидкости;
3) δ — сила поверхностного натяжения;
4) $E_ж$ — модуль упругости.

3. **Степень интенсивности турбулентности,** характеристикой которой является среднеквадратичное значение пульсационных составляющих δ_u.

Теперь применим π-теорему.

Исходя из приведенных выше параметров, у нас набирается 10 различных величин: l, l_2, Δ, l_Δ, Δp, μ, δ, $E_ж$, δ_u, t.

43а

43. Равномерное движение и коэффициент сопротивления по длине. Формула Шези. Средняя скорость и расход потока

При ламинарном движении (если оно равномерное) ни живое сечение, ни средняя скорость, ни эпюра скоростей по длине не меняются со временем.

При равномерном движении пьезометрический уклон

$$J_n = \frac{h_l}{l}; \quad r_0 = \frac{d}{2}, \tag{1}$$

где l_1 — длина потока;
h_l — потери напора на длине L;
$r_0 d$ — соответственно радиус и диаметр трубы.

$$h_l = \lambda \frac{l\upsilon^2}{d2g}. \tag{2}$$

В формуле (2) безразмерный коэффициент λ называют **коэффициентом гидравлического трения** или **коэффициентом Дарси**.

Если в (2) d заменить на гидравлический радиус, то следует

$$\upsilon = \sqrt{\frac{8nR}{\lambda} \times \frac{h_l}{l}}. \tag{3}$$

44а

44. Гидравлическое подобие

Понятие о подобии. Гидродинамическое моделирование

Для исследования вопросов сооружения гидроэлектростанций применяют метод гидравлических подобий, суть которого состоит в том, что в лабораторных условиях моделируются точно такие же условия, что и в натуре. Это явление называют физическим моделированием.

Например, чтобы два потока были подобными, требуется их:

1) геометрическое подобие, когда

$$\frac{l_н}{l_м} = M_l, \tag{1}$$

где индексы $н$, $м$ соответственно означают «натура» и «модель».

Однако, отношение

$$\frac{\Delta}{R} = \text{idem}, \tag{2}$$

что значит, относительная шероховатость в модели такая же, как и в натуре;

2) кинематическое подобие, когда траектории соответствующих частиц, соответствующие линии тока подобны. Кроме того, если соответствующие части прошли подобные расстояния $l_н$, $l_м$, то отношение соответствующих времен движения выглядит следующим образом:

$$\frac{T_н}{T_м} = M_i, \tag{3}$$

где M_i — масштаб времени.

42б Кроме этих, имеем еще три независимых параметра: l_1, ρ, υ. Добавим еще ускорение падения g.

Всего имеем κ = 14 размерных величин, три из которых независимы.

Требуется получить (κ-n) безразмерных комплексов, или, как их называют π-членов.

Для этого любой параметр из 11, который не входил бы в состав независимых параметров (в данном случае l_1, ρ, υ), обозначим как N_i, теперь можно определить безразмерный комплекс, который является характеристикой этого параметра N_i, то есть i-тый π-член:

$$\pi_i = \frac{l_1^x \upsilon^y \rho^z}{N_i} = L^0 M^0 T^0. \qquad (1)$$

Здесь углы размерности базовых величин:

$$[l_1] = L;\ [\upsilon] = LT^{-1};\ [\rho] = ML^{-3}, \qquad (2)$$

общий вид зависимости для всех 14 параметров имеет вид:

$$f(l, l_1, l_2, \Delta, l_\Delta, \Delta p, \upsilon, \rho, \mu, g, \delta, E_ж, \delta_\upsilon, t) = 0. \qquad (3)$$

41б Если рассматривается поток в открытых руслах (каналы, река), то течение само может формировать шероховатость (подвижную) из осадков. Несмотря на все разновидности, шероховатость характеризуется в основном величиной Δ, которую называют абсолютной шероховатостью. Если сравнивать Δ с толщиной вязкого подслоя $\delta_{в.с}$, то в зависимости от их взаимоотношения, различают следующие случаи:

1) $\Delta < \delta_{в.с}$; потери энергии наименьшие, вязкий подслой покрывает неровности, и основная часть потока не соприкасается с шероховатой стенкой;
2) $\Delta > \delta_{в.с}$; в этом случае шероховатость проникает в основную часть потока, в турбулентную область, и это приводит еще к большей потере энергии.

Но поскольку сама толщина $\delta_{в.с}$ зависит от числа Re, а оно от скорости потока, то понятия о гидравлических шероховатостях и гладкостях относительны.

Поэтому введены понятия относительных шероховатостей и гладкостей, о которых сказано выше.

Напор в трубе зависит от шероховатости. Толщина видного подслоя определяется формулой:

$$\delta_{в.п} = \frac{30d}{Re\sqrt{\lambda}},$$

где d — диаметр трубы;
Re — число Рейнольдса;
λ — коэффициент Дарси.

44б Такое же сходство имеется для скорости (масштаб скорости)

$$\frac{\upsilon_н}{\upsilon_м} = M \qquad (4)$$

и ускорения (масштаб ускорения)

$$\frac{j_н}{j_м} = M_j; \qquad (5)$$

3) динамическое подобие, когда требуется, чтобы соответствующие силы были подобными, например, масштаб сил

$$\frac{P_н}{P_м} = M_p. \qquad (6)$$

Таким образом, если потоки жидкости механически подобны, то они подобны гидравлически; коэффициенты M_l, M_t, M_υ, M_p и прочие называются **масштабными множителями**.

43б Введем обозначение $c = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$, тогда с учетом того, что $\frac{h_l}{l} = J$, гидравлический уклон

$$\upsilon = c\sqrt{RJ}. \qquad (4)$$

Эту формулу называют **формулой Шези**.

$$c = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \qquad (5)$$

называется коэффициентом Шези.

Если коэффициент Дарси λ — величина безразмерная, то коэффициент Шези с имеет размерность

$$[c] = L^{0,5}T^{-1}. \qquad (6)$$

Определимся с расходом потока с участием коэффициента Шези:

$$Q = w\upsilon = wc\sqrt{RJ}. \qquad (7)$$

Преобразуем формулу Шези в следующий вид:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \times \sqrt{gRJ}. \qquad (8)$$

Величину $\sqrt{gRJ} = u$ называют динамической скоростью.

45а

45. Критерии гидродинамического подобия

Условия гидродинамического подобия требуют равенства всех сил, но это практически не удается. По этой причине, подобие устанавливают по какой-нибудь из этих сил, которая в данном случае преобладает. Кроме того, требуется выполнение условий однозначности, которые включают в себя пограничные условия потока, основные физические характеристики и начальные условия.

Рассмотрим частный случай.

Преобладает влияние сил тяжести, например, при течении через отверстия или водосливы

$$P = \rho g W. \qquad (1)$$

Если перейти к взаимоотношению $P_н$ и $P_м$ и выразить его в масштабных множителях, то

$$M_p = \frac{P_н}{P_м} = M_0 M_l^3 M_g. \qquad (2)$$

После необходимого преобразования, следует

$$M_2 M_g^{-1} M_l^{-1} = 1. \qquad (3)$$

Если теперь совершить переход от масштабных множителей к самим отношениям, то с учетом того, что l — характерный размер живого сечения, то

$$\upsilon_н^2 (g_н l_н^2) = \frac{\upsilon_м^2}{g_м l_м^2}. \qquad (4)$$

46а

46. Распределение касательных напряжений при равномерном движении

При равномерном движении потеря напора на длине l_{he} определяется:

$$h_l = \frac{\tau_0 \chi l}{\rho g w}, \qquad (1)$$

где χ — смоченный периметр,
w — площадь живого сечения,
l_{he} — длина пути потока,
ρ, g — плотность жидкости и ускорение силы тяжести,
τ_0 — касательное напряжение вблизи внутренних стенок трубы.

Следует:

$$\tau_0 = \rho g R J, \qquad (2)$$

Откуда с учетом $h_1 \neq l = J$ и $w / x = R = \frac{r}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \tau_0 = \rho g \frac{r_0}{2} J. \qquad (3)$$

Исходя из полученных результатов для τ_0, распределения касательного напряжения τ в произвольно выбранной точке выделенного объема, например, в точке $r_0 - r = t$ это расстояние равно:

$$\tau = \rho g \frac{r}{2} J, \qquad (4)$$

47а

47. Турбулентный равномерный режим движения потока

Если рассмотреть плоское движение (т. е. потенциальное движение, когда траектории всех частиц параллельны одной и той же плоскости и являются функцией двух координат и если движение неустановившееся), одновременно являющееся равномерным турбулентным в системе координат XYZ, когда линии тока параллельны оси O_X, то

$$\bar{u}_x = \bar{u}_x(t);\ \bar{u}_y = 0;\ \bar{u}_x = 0,$$

Усредненная скорость при сильно турбулентном движении.

$$u = \frac{u}{\chi} \ln t + \text{const}.$$

Это выражение: логарифмический закон распределения скоростей для турбулентного движения.

При напорном движении поток состоит в основном из пяти областей:

1) ламинарная: приосевая область, где местная скорость максимальна, в этой области $\lambda_{лам} = f(Re)$, где число Рейнольдса $Re < 2300$;
2) во второй области поток начинает переходить из ламинарного в турбулентный, следовательно, увеличивается и число Re;
3) здесь поток полностью турбулентный; в этой области трубы называются **гидравлическими гладкими** (шероховатость Δ меньше, чем толщина вязкого слоя $\delta_в$, то есть $\Delta < \delta_в$).

48а

48. Неравномерное движение: формула Вейсбаха и ее применение

При равномерном движении потери напора, как правило, выражаются формулой

$$h_{пр} = \xi \upsilon^2 / 2g, \qquad (1)$$

где потери напора $h_{пр}$ зависят от скорости потока; она постоянна, поскольку, движение равномерное.

Следовательно, и формула (1) имеет соответствующие формы.

Действительно, если в первом случае

$$h_l = \frac{\xi_l \upsilon^2}{2g}, \qquad (2)$$

то во втором случае

$$h_м = \frac{\xi_м \upsilon^2}{2g}. \qquad (3)$$

Как видно, формулы (2) и (3) различаются только коэффициентом сопротивления x.

Формула (3) называется **формулой Вейсбаха**. В обоих формулах, как и в (1), коэффициент сопротивления — величина безразмерная, и в практических целях определяется, как правило, по таблицам.

Для проведения опыта по определению $xм$ последовательность действий следующая:

1) должен быть обеспечен ход равномерности потока в исследуемом конструктивном элементе. Необходимо обеспечить достаточное удаление от входа пьезометров.

46б тем самым вводим касательное напряжение t на поверхности цилиндра, действующее на точку в $r_0 - r = t$.

Из сравнений (4) и (3) следует:

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{r}{r_0},$$

поэтому

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{r_0}. \qquad (5)$$

Подставив $r = r_0 - t$ в (5), получим

$$\tau = \tau_0 \frac{r_0 - t}{r_0}. \qquad (6)$$

Выводы:

1) при равномерном движении распределение касательного напряжения по радиусу трубы подчиняется линейному закону;
2) на стенке трубы касательное напряжение максимально (когда $r_0 = r$, т. е. $t = 0$), на оси трубы оно равно нулю (когда $r_0 = t$).

R — гидравлический радиус трубы,получим,что

$$h_l = \frac{\tau_0 l}{\rho g R}. \qquad (7)$$

45б В (4) комплекс υ^2/gl называется **критерием Фруди**, который формулируется так: потоки, в которых преобладают силы тяжести, геометрически подобны, если

$$\frac{Fr_н}{Fr_м} = 1 \text{ или } Fr = \text{idem}; \qquad (5)$$

Это второе условие гидродинамического подобия.

Нами получены три критерия гидродинамического подобия:

1. Критерий Ньютона (общие критерии).
2. Критерий Фруда.
3. Критерий Дарси.

Отметим только: в частных случаях гидродинамическое подобие может быть установлено также по

$$\left(\frac{\Delta}{R}\right)_н = \left(\frac{\Delta}{R}\right)_м, \; J_м = J_н,$$

где Δ — абсолютная шероховатость;
R — гидравлический радиус;
J — гидравлический уклон.

48б 2) для установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости между двумя сечениями (в нашем случае, это вход с $x_1\upsilon_1$ и выход с $x_2\upsilon_2$), применяем уравнение Бернулли:

$$t_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{x_1\upsilon_1^2}{2g} = t_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{x_2\upsilon_2}{2g} + h_{пр}, \qquad (4)$$

В рассматриваемых сечениях поток должен быть плавно изменяющимся. Между сечениями могло бы произойти что угодно.

Поскольку суммарные потери напора

$$h_{пр} = h_l + h_м, \qquad (5)$$

то находим потери напора на этом же участке;

3) по формуле (5) находим, что $h_м = h_{пр} - h_l$, после этого по формуле (2) находим искомый коэффициент сопротивления

$$\xi_м = h_м \left(\frac{\upsilon_2}{2g}\right)^{-1}. \qquad (6)$$

47б В случае, когда $\Delta > \delta_в$, труба считается «гидравлически шероховатой».

Характерно, что если для $\lambda_{лам} = f(Re^{-1})$, то в этом случае $\lambda_{гд} = f(Re^{-0,25})$;

4) эта область находится на пути перехода потока к подвязкому слою: в этой области $\lambda_{лам} = (Re, \Delta/r_0)$. Как видно, коэффициент Дарси уже начинает зависеть от абсолютной шероховатости Δ;
5) эта область называется **квадратичной областью** (коэффициент Дарси не зависит от числа Рейнольдса, но определяется почти полностью касательным напряжением) и является пристенной.

Эту область называют **автомодельной**, т. е. не зависящей от Re.

В общем случае, как известно, коэффициент Шези

$$c = \sqrt{8g/\lambda}.$$

Формула Павловского:

$$c = \frac{1}{n} R^y,$$

где n — коэффициент шероховатости;
R — гидравлический радиус.

При $0,1 \le R \le 3$ м

$$y = 2,5\sqrt{n} - 0,13 - 0,75\sqrt{R}\left(\sqrt{n} - 0,1\right),$$

причем при $R < 1$ м, $y \approx 1,5\sqrt{n}$, при $R > 1$ м, $y \approx 1,3\sqrt{n}$.

49a 49. Местные сопротивления

Что происходит после того, как поток вошел с некоторым напором и скоростью в трубопровод.

Это зависит от вида движения: если поток ламинарный, то есть его движение описывается линейным законом, тогда его кривая — парабола. Потери напора при таком движении достигают (0,2 × 0,4) × (υ^2/ 2g). При турбулентном движении, когда оно описывается логарифмической функцией, потери напора — (0,1 × × 1,5) × (υ^2/2g).

После таких потерь напора движение потока стабилизируется, то есть восстанавливается ламинарный или турбулентный поток, каким и был входной.

Участок, на котором происходят вышеуказанные потери напора, восстанавливается по характеру, прежнее движение называется **начальным участком**.

А чему равна длина начального участка $l_{нач}$.

Турбулентный поток восстанавливается в 5 раз быстрее, чем ламинарный, при одних и тех же гидравлических сопутствующих данных.

Рассмотрим частный случай, когда поток не сужается, как рассмотрели выше, но внезапно расширяется. Почему происходят потери напора при такой геометрии потока?

Для общего случая:

$$h_{в.р} = \frac{x(\upsilon_1 - \upsilon_2)^2}{2g}, \qquad (1)$$

Чтобы определить коэффициенты местного сопротивления, преобразуем (1) в следующий вид: разделив и умножив на υ_1^2

$$h_{в.р} = \left(1 - \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right)^2 \frac{\upsilon_1^2}{2g}. \qquad (2)$$

50a 50. Расчет трубопроводов

Задачи расчета трубопроводов.

Требуются решать следующие задачи:

1) требуется определить расход потока Q, при этом заданы напор H; длина трубы l; шероховатость трубы Δ; плотность жидкости r; вязкость жидкости V (кинематическая);
2) требуется определить напор H. Заданы расход потока Q; параметры трубопровода: длина l; диаметр d; шероховатость Δ; параметры жидкости: ρ плотность; вязкость V;
3) требуется определить необходимый диаметр трубопровода d. Заданы расход потока Q; напор H; длина трубы l; ее шероховатость Δ; плотность жидкости ρ; ее вязкость V.

Методика решений задач одна и та же: совместное применение уравнений Бернулли и неразрывности.

Напор определяется выражением:

$$H = \frac{\upsilon^2 l}{c^2 R}.$$

Расход жидкости,

$$Q = w\upsilon = wc\sqrt{RJ},$$

поскольку $J = H / l$.

Важной характеристикой трубопровода является величина, которая объединяет некоторые параметры трубопровода, исходя из диаметра трубы (рассматри-

51a 51. Гидравлический удар

Наиболее распространенным, то есть часто встречающимся видом неустановившегося движения является **гидравлический удар**. Это типичное явление при быстром или постепенном закрытии затворов (резкое изменение скоростей в некотором сечении потока приводит к гидравлическому удару). Как следствие, возникают давления, которые распространяются по всему трубопроводу волной.

Эта волна может быть разрушительной, если не принять специальные меры: могут разорваться трубы, выйти из строя насосные станции, возникнуть насыщенные пары со всеми разрушительными последствиями и т. д.

Гидравлический удар может порождать разрывы жидкости в трубопроводе — это не менее серьезная авария, чем разрыв трубы.

Наиболее часто встречающиеся причины гидравлического удара следующие: внезапное закрытие (открытие) затворов, внезапная остановка насосов при заполнении трубопроводов водой, выпуск воздуха через гидранты в оросительной сети, пуск насоса при открытом затворе.

Если это уже случилось, то как протекает гидравлический удар, какие последствия вызывает?

Все это зависит от того, по какой причине возник гидравлический удар. Рассмотрим основную из этих причин. Механизмы возникновения и протекания по остальным причинам сходны.

Мгновенное закрытие затвора

Гидравлический удар, который происходит в этом случае — чрезвычайно интересное явление.

52a 52. Скорость распространения волны гидравлического удара

В гидравлических расчетах немалый интерес представляет **скорость распространения ударной волны гидравлического удара**, как и сам гидравлический удар. Как ее определить? Для этого рассмотрим круглое поперечное сечение в упругом трубопроводе. Если рассмотреть участок длиной Δl, то выше этого участка за время Δt жидкость еще движется со скоростью υ_0, кстати, как и до закрытия затвора.

Поэтому в соответствующей длине l объем $\Delta V'$ войдет жидкость $Q = \omega_0 \upsilon_0$, т. е.

$$\Delta V' = Q\Delta t = \omega_0 \upsilon_0 \Delta t, \qquad (1)$$

где площадь круглого поперечного сечения — объем, образовавшийся в результате повышения давления и, как следствие этого, из-за растяжек стены трубопровода ΔV_1. Объем, который возник из-за роста давления на Δp обозначим как ΔV_2. Значит, тот объем, который возник после гидравлического удара, есть

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2, \qquad (2)$$

$\Delta V'$ входит в ΔV.

Определимся теперь: чему будут равны ΔV_1 и ΔV_2.

В результате растяжки трубы произойдет приращение радиуса трубы на Δr, то есть радиус станет равным $r = r_0 + \Delta r$. Из-за этого увеличится круглое сечение поперечного сечения на $\Delta\omega = \omega - \omega_0$. Все это приведет к приращению объема на

$$\Delta V_1 = (\omega - \omega_0)\Delta l = \Delta\omega \Delta l . \qquad (3)$$

50б ваем простые трубы, где диаметр по всей длине l постоянен). Этот параметр k называют **расходной характеристикой**:

$$k = wc\sqrt{R}.$$

Если начинать наблюдение с самого начала трубопровода, то увидим: некоторая часть жидкости, не изменяясь, доходит до конца трубопровода транзитом. Пусть это количество будет $Q_т$ (транзитный расход).

Жидкость по пути частично раздается потребителям: обозначим эту часть как $Q_р$ (путевой расход).

С учетом этих обозначений, в начале трубопровода

$$Q = Q_т + Q_р,$$

соответственно, в конце расход потока

$$Q - Q_р = Q_т.$$

Что касается напора в трубопроводе, то:

$$H = Q^2_{расх}\frac{l}{k^2}.$$

49б Определим υ_2/υ_1 из уравнения неразрывности $\upsilon_1 w_1 = \upsilon_2 w_2$ как $\upsilon_2/\upsilon_1 = w_1/w_2$ и подставим в (2):

$$h_{в.р.} = \left(1 - \frac{w_1}{w_2}\right)^2 \frac{\upsilon_1^2}{2g}. \qquad (3)$$

Остается заключить, что

$$\xi_{в.р.1} = \left(1 - \frac{w_1}{w_2}\right)^2. \qquad (4)$$

52б Следует иметь в виду, что индекс ноль означает принадлежность параметра к начальному состоянию.

Что касается жидкости, то ее объем уменьшится на ΔV_2 из-за приращения давления на Δp.

Искомая формула скорости распространения волны гидравлического удара:

$$C = \sqrt{\frac{\frac{E_ж}{\rho}}{1 + \frac{D}{l} + \frac{E_ж}{E}}}, \qquad (4)$$

где ρ — плотность жидкости;

D/l — параметр, характеризующий толщину стенки трубы.

Очевидно, что чем больше D/l, тем меньше скорость распространения волны C. Если труба жесткая абсолютно, то есть $E = \infty$, то, как следует из (4),

$$C_0 = \sqrt{\frac{E_ж}{\rho}}. \qquad (5)$$

51б Пусть имеем открытый резервуар, от которого отводится гидравлическая прямолинейная труба; на некотором расстоянии от резервуара труба имеет затвор. Что произойдет при его мгновенном закрытии?

Во-первых, пусть:

1) резервуар настолько велик, что процессы, происходящие в трубопроводе, в жидкости (в резервуаре) не отражаются;
2) потери напора до закрытия затвора ничтожны, следовательно, пьезометрическая и горизонтальная линии совпадают;
3) давление жидкости в трубопроводе происходит только с одной координатой, две другие проекции местных скоростей равны нулю; движение определяется только продольной координатой.

Во-вторых, теперь внезапно закроем затвор — в момент времени t_0; могут произойти два случая:

1) если стенки трубопровода абсолютно неупругие, т. е. $E = \infty$, и жидкость несжимаема ($E_ж = \infty$), то движение жидкости также внезапно останавливается, что приводит к резкому росту давления у затвора, последствия могут быть разрушительны.

Приращение давления при гидравлическом ударе по формуле Жуковского:

$$\Delta p = \rho C \upsilon_0 + \rho \upsilon_0^2.$$

53a

53. Дифференциальные уравнения неустановившегося движения

Для того, чтобы составить уравнение любого вида движения, нужно проецировать все действующие силы на систему и приравнивать их сумму к нулю. Так и поступим.

Пусть имеем напорный трубопровод круглого сечения, в котором есть неустановившееся движение жидкости.

Ось потока совпадает с осью l. Если выделить на этой оси элемент dl, то, согласно вышеуказанному правилу, можно составить уравнение движения

$$\Delta M\frac{d\upsilon}{dt}=\Delta p+\Delta G+\Delta T. \qquad (1)$$

В приведенном уравнении проекции четырех сил, действующих на поток, точнее, на Δl, равны нулю:

1) ΔM — силы инерции, действующие на элемент dl;
2) Δp — силы гидродинамического давления;
3) ΔT — касательные силы;
4) ΔG — силы тяжести: здесь мы, говоря о силах, имели в виду проекции сил, действующих на элемент Δl.

Перейдем к формуле (1), непосредственно к проекциям действующих сил на элемент Δt, на ось движения.

1. **Проекции поверхностных сил:**

1) для гидродинамических сил Δp проекцией будет

$$\frac{\partial(\rho+\omega)}{\partial l}dl; \qquad (2)$$

54a

54. Истечение жидкости при постоянном напоре через малое отверстие

Будем рассматривать истечение, которое происходит через малое незатопленное отверстие. Для того, чтобы отверстие считать малым, должны выполняться условия:

1) напор в центре тяжести $H >> d$, где d — высота отверстия;
2) напор в любой точке отверстия практически равен напору в центре тяжести H.

Что касается затопленности, то таковой считают истечение под уровень жидкости при условии, если не изменяются со временем: положение свободных поверхностей до и после отверстий, давление на свободные поверхности до и после отверстий, атмосферное давление по обе стороны от отверстий.

Таким образом, имеем резервуар с жидкостью, у которой плотность ρ, из которого через малое отверстие происходит истечение под уровень. Напор H в центре тяжести отверстия постоянен, что значит, скорости истечения постоянны. Следовательно, движение установившееся. Условием равенства скоростей на противоположных вертикальных границах отверстий является условие $d \le 0{,}1H$, где d — наибольший вертикальный размер.

Ясно, что нашей задачей является определение скорости истечения и расхода жидкости в нем.

Сечение струи, отстоящее от внутренней стенки резервуара на расстояние $0{,}5d$, называют **сжатым сечением** струи, которое характеризуется коэффициентом сжатия.

55a

55. Истечение через большое отверстие

Отверстие считают **малым**, когда его вертикальные размеры $d < 0{,}1H$. **Большим** отверстием будем считать такое отверстие, для которого тот же $d > 0{,}1H$. Рассматривая истечение через малое отверстие, практически пренебрегли различием скоростей в разных точках сечения струи. В этом случае поступить так же мы не сможем.

Задача та же: определить расход и скорости в сжатом сечении.

Поэтому расход определяют следующим способом: выделяют бесконечно малую горизонтальную высоту dz. Таким образом, получается горизонтальная полоса с переменной длиной b_z. Тогда, интегрировав по длине, можно найти элементарный расход:

$$dQ=\mu b_z\sqrt{2gZ}\,dz, \qquad (1)$$

где Z — переменный напор по высоте отверстия, на такую глубину погружен верх выбранной полосы;
μ — коэффициент расхода через отверстие;
b_z — переменная длина (или ширина) полосы.

Расход Q (1) можем определить, если μ = const и известна формула $b_z = f(z)$. В общем случае, расход определяют по формуле

$$Q=\mu\sqrt{2gZ}\int_{H1}^{H2}b_z\sqrt{Z}dz. \qquad (2)$$

56a

56. Коэффициент расхода системы

Требуется выяснить вопрос о расходе, если истечение происходит по трубам, соединенным в одну систему, но имеющих разные геометрические данные. Здесь нужно рассмотреть каждый случай отдельно. **Приведем некоторые из них**.

1. Истечение происходит между двумя резервуарами при постоянном напоре через систему труб, у которых разные диаметры и длина. В этом случае на выходе системы $E = 1$, следовательно, численно $\mu = \upsilon$, где E, μ, υ — коэффициенты соответственно сжатия, расхода и скорости.

2. Истечение происходит через систему труб с разными ω (площадь поперечного сечения): при этом определяют суммарный коэффициент сопротивления системы, который состоит из таких же коэффициентов, но для каждого участка отдельно.

Истечение происходит в атмосферу через незатопленное отверстие. В этом случае

$$Q=\mu\omega\sqrt{2gH}, \qquad (1)$$

где $H = z$ = const — напор;
μ, ω — коэффициент расхода и площадь сечения.

Для того, чтобы рассчитать расход, нужно в (1) вместо коэффициента расхода m подставить коэффициент расхода системы:

$$\mu_{сист}=\frac{1}{\sqrt{x+\zeta_{сист}}}, \qquad (2)$$

54б Формулы определения скорости и расхода потока:

$$\upsilon_C = \upsilon_0 = \sqrt{2gH}, \quad (1)$$

где υ_0 называется коэффициентом скорости.

Теперь выполним вторую задачу, определим расход Q. По определению

$$Q = \omega\upsilon = \omega_C\upsilon_C = E\omega\upsilon_C = \upsilon_C = E\upsilon_0\omega\sqrt{2gH}. \quad (2)$$

Обозначим $E\upsilon_0 = \mu_0$, где μ_0 — коэффициент расхода, тогда

$$Q = \mu_0\omega\sqrt{2gH}. \quad (3)$$

Различают следующие разновидности сжатия:

1. **Полное сжатие** — это такое сжатие, которое происходит по всему периметру отверстия, в противном случае сжатие считается неполным сжатием.

2. **Совершенное сжатие** является одной из двух разновидностей полного сжатия. Это такое сжатие, когда кривизны траектории, следовательно, и степень сжатия струи наибольшие.

Подводя итог, заметим, что неполная и несовершенная формы сжатий приводят к росту коэффициента сжатия. Характерной особенностью совершенного сжатия является то, что в зависимости от того, под воздействием каких сил происходит истечение.

53б 2) для касательных сил ΔT

Проекция касательных сил имеет вид:

$$-\rho g\omega J dl. \quad (3)$$

2. **Проекция сил тяжести ΔG на элемент Δl**

$$\rho g\omega dl \sin\Theta = -\rho g\omega dl\frac{\partial z}{\partial l}. \quad (4)$$

3. **Проекция сил инерции ΔM равна**

$$-\rho g\xi \, dl\frac{d\upsilon}{dt} = -\rho g\omega dl\left(\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon\frac{\partial z}{\partial l}\right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\upsilon^2}{2g}\right) = -\frac{1}{g}\times\frac{\partial\upsilon}{\partial t} - J. \quad (6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{C^2}{g}\times\frac{\partial\upsilon}{\partial l}, \quad (7)$$

56б поскольку в (2) коэффициент Кориолиса (или кинетической энергии) x отнесен к выходному сечению, где, как правило $x \approx 1$.

Такое же истечение происходит через затопленное отверстие

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gz}, \quad (3)$$

в этом случае расход определяется по формуле (3), где $\mu = \mu_{сист}$, ω — площадь выходного сечения. При отсутствии или незначительности скорости в приемнике или трубе коэффициент расхода заменяется на

$$\mu_{сист} = \frac{1}{\sqrt{\zeta_{сист}}}. \quad (4)$$

Нужно только иметь в виду, что при затопленном отверстии $\zeta_{вых} = 1$, и этот $\zeta_{вых}$ входит в $\zeta_{сист}$.

55б Если форма отверстия прямоугольная, то $b_z = b = \text{const}$, интегрировав (2), получаем:

$$Q = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\left(H_2^{\frac{3}{2}} - H_1^{\frac{3}{2}}\right) \quad (3)$$

где H_1, H_2 — напоры на уровнях соответственно у верхней и у нижней кромок отверстия;

$H_ц$ — напор над центром отверстия;

d — высота прямоугольника.

Формула (3) имеет более упрощенный вид:

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH_ц},$$

В случае истечения через круглое отверстие пределами интегрирования в (2) служат $H_1 = H_ц - r$; $H_2 = H_ц + r$; $Z = H_ц - r\cos\upsilon$; $dz = \rho\sin\upsilon d\upsilon$; $b_z = 2r\upsilon\sin\upsilon$.

Избегая математического излишества, приведем конечную формулу:

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH_ц}. \quad (4)$$

Как видно из сравнений формул, особой разницы в формулах для расхода нет, только при больших и малых отверстиях коэффициенты расхода разные.

М. А. Бабаев

Гидравлика

шпаргалка

Завредакцией: ***Пятибратова М. С.***
Редактор: ***Алферова М. Ю.***

ООО «Издательство «Эксмо»
127299, Москва, ул. Клары Цеткин, д. 18/5. Тел.: 411-68-86, 956-39-21
Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru

Формат 60 × 90 1/16.