
ЛЕКЦИЯ № 1. Гидростатика

1. Основные физические свойства жидкости

Вряд ли кто из вас не знает, что представляют собой гидротехника, водное хозяйство, мелиорация.

Водопроводная и канализационная система, услугами которых пользуется каждый из нас — это водное хозяйство.

Бесконечные плодородные степи находятся в относительно жаркой погодной зоне, требуют орошения, то есть дополнительного увлажнения. Это обеспечивается с помощью водного хозяйства.

Гидравлика (с греческого *hydor* — вода; *aulos* — труба, желоб) — наука, изучающая законы равновесия и механического движения жидкостей, гидравлика разрабатывает также методы применения этих законов в вышеназванных отраслях.

1. Аналитический. Цель применения этого метода — устанавливать зависимость между кинематическими и динамическими характеристиками жидкости.

С этой целью пользуются уравнениями механики; в итоге получают уравнения движения и равновесия жидкости.

Для упрощенного применения уравнений механики пользуются модельными жидкостями: например, сплошная жидкость.

По определению, ни один параметр этого континуума (сплошной жидкости) не может быть прерывным, в том числе его производное, причем в каждой точке, если нет особых условий.

Такая гипотеза позволяет установить картину механического движения и равновесия жидкости в каждой точке континуума пространства.

Еще одним приемом, применяемом для облегчения решения теоретических задач, является решение задачи для одномерного случая со следующим обобщением для трехмерного. Дело в том, что для таких случаев не так трудно установить среднее значение

исследуемого параметра. После этого можно получить другие уравнения гидравлики, наиболее часто применяемые.

Однако этот метод, как и теоретическая гидромеханика, суть которой составляет строго математический подход, не всегда приводит к необходимому теоретическому механизму решения проблемы, хотя и неплохо раскрывает ее общую природу проблемы.

2. **Экспериментальный.** Основным приемом, по этому методу, является использование моделей, согласно теории подобий: при этом полученные данные применяются в практических условиях и становится возможным уточнение аналитических результатов.

Наилучшим вариантом является сочетание двух вышеназванных методов.

Современную гидравлику трудно себе представить без применения современных средств проектирования: это высокоскоростные локальные сети, автоматизированное рабочее место конструктора и прочее.

Поэтому современную гидравлику нередко называют вычислительной гидравликой.

Свойства жидкости

Поскольку газ — следующее агрегатное состояние вещества, то у этих форм вещества существует свойство, общее для обоих агрегатных состояний. Это свойство **текучести**.

Исходя из свойств текучести, рассмотрев жидкое и газообразное агрегатное состояние вещества, увидим, что жидкость — то состояние вещества, в котором его уже невозможно сжимать (или можно сжать бесконечно мало). Газ — такое состояние того же вещества, в котором его можно сжать, то есть газ можно назвать сжимаемой жидкостью, точно так же, как и жидкость — несжимаемым газом.

Другими словами, особых принципиальных различий, кроме сжимаемости, между газом и жидкостью не наблюдается.

Несжимаемую жидкость, равновесие и движение которой изучает гидравлика, называют также **капельной жидкостью**.

К вышеуказанному свойству следует добавить, что это такая сплошная среда, в которой нет ни разрывов, ни пустот. Отсюда и непрерывность характеристик.

Плотность жидкости. Если рассмотреть произвольный объем жидкости W , то он имеет массу M .

Если жидкость однородна, то есть если во всех направлениях ее свойства одинаковы, то **плотность** будет равна

$$\rho = \frac{M}{W}. \quad (1)$$

Если требуется узнать ρ в каждой точке A объема W , то

$$\rho_A = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta W}. \quad (2)$$

где Δ — элементарность рассматриваемых характеристик в точке A .

Принято в связи с плотностью говорить об удельном весе однородной жидкости γ

$$\gamma = \frac{G}{W} = \frac{M}{W} = g = \rho g \quad (3)$$

где $G = Mg$ — вес жидкости;

$g = 9,831 \text{ м/с}^2$ (на полюсе), $g = 9,781 \text{ м/с}^2$ (на экваторе) — ускорение свободного падения.

В системе СИ единицы измерения для плотности — кг/м^3 ; удельного веса — Н/м^2 .

Плотность нельзя рассматривать отдельно от таких параметров, как объем и температура.

Однако, вопреки свойствам всех жидкостей (или газов), ρ max достигается при $t = 4 \text{ }^\circ\text{C}$.

В дальнейшем с ростом температуры ρ уменьшается.

С увеличением давления (при $t = 4\text{ }^\circ\text{C}$) ρ также уменьшается.

В нашем курсе принято, что $\rho = 1000\text{ кг/м}^3$. Возвращаясь к сжимаемости, следует отметить, что она характеризуется коэффициентом объемного сжатия.

$$\beta_c = \frac{1}{W} \times \frac{dW}{d\rho}. \quad (4)$$

Из формулы видно, что речь идет о способности жидкостей уменьшать объем при единичном изменении давления: из-за уменьшения присутствует знак минус.

Если в формуле (1) предположить $M = \text{const}$ и взять производное от нее, то получим

$$-\frac{dW}{W} = \frac{d\rho}{\rho}. \quad (5)$$

С учетом формулы (5) из выражения (4) следует:

$$\beta_c = \frac{1}{\rho} \times \frac{d\rho}{d\rho}. \quad (6)$$

Получили качественно совсем другую формулу.

Если в (4) единичное изменение ρ приводит к изменению объема, то в (6) — плотности.

По определению $E_{жс} = 1/\beta_c$ называется модулем упругости жидкости.

Подставив (6) в (7) и преобразовав, получим закон Гука для жидкости:

$$E_{жс}^1 = \frac{\rho d\rho}{d\rho}, \quad (7)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\rho}{E_{жс}}. \quad (8)$$

Следует запомнить, что несжимаемость жидкости вообще и воды в частности все же относительна.

Например, при $t_0 = 90\text{ }^\circ\text{C}$ $E_{ж}$ изменяется от $4,4 \times 10^3$ МПа у глицерина до $1,35 \times 10^3$ МПа у минеральных масел.

У воды рост давления 9,81 МПа вызывает уменьшение объема V_0 на $1/20\ 000 V_0$. Однако это значение в 100 раз больше, чем сжимаемость стали. Этот факт говорит о том, что если взять классификацию веществ по сжимаемости, то воду почти наверняка можно относить к классу металлов. Если бы это было не так, то уровень Мирового океана был бы на 30 м выше, чем есть на самом деле. Это свойство при внезапном открытии или закрытии запорного устройства в трубопроводе порождает ряд гидравлических явлений, в которых надо учитывать, что жидкость в определенных условиях (в общем диапазоне) все же сжимаема. В противном случае ошибок не избежать.

В противоположность сжимаемости, существует температурный коэффициент объемного расширения, которым характеризуется свойство жидкости, называемое **температурным расширением**.

$$\beta_z = \frac{1}{W} \times \frac{dW}{dt}. \quad (9)$$

Как и коэффициент объемного сжатия, коэффициент объемного расширения также уменьшается при росте давления (для воды уменьшается только после $50\text{ }^\circ\text{C}$; до $50\text{ }^\circ\text{C}$ коэффициент еще растет).

Следующее свойство жидкости — **вязкость**. Движение жидкости происходит как бы слоями, а между слоями, на границе их соприкосновения возникают силы внутреннего сопротивления: их называют также силами вязкости. Суть явления в том, что слой с меньшей скоростью «тормозит» соседний. В итоге появляется особое состояние жидкости, из-за межмолекулярных связей у соседних слоев. Такое состояние называют вязкостью.

Если судить о касательном напряжении, которое возникает на касающихся поверхностях, то его истинное значение

$$\Gamma = \mu \frac{d\theta}{dt}, \quad (10)$$

где μ — характеристика свойства вязкости и называется динамической вязкостью жидкости;

$d\theta/dt$ — скорость деформации сдвига;

θ — деформация сдвига.

Установлено, что:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{dn}, \quad (11)$$

где du — градиент скорости;

dn — толщина слоя;

u — скорость слоя.

Физический смысл (11) состоит в следующем: при переходе от оси к стенкам трубы, через каждый слой dn скорость жидкости уменьшается на du ; знак градиента зависит от его направления, т. е. он может быть как со знаком «+», так и «-».

С учетом последнего утверждения и с учетом (11), из (10) следует:

$$\tau = \pm \mu \frac{du}{dn}. \quad (12)$$

Отношение динамической вязкости к плотности жидкости называется кинематической вязкостью.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (13)$$

Единицы измерения вязкости в системе СИ:

- 1) для динамической вязкости — Па × с; 1 Па × с = 10 Пз = 10 г/см × с, где пуаз — в честь ученого Пуазейся;
- 2) для кинематической вязкости — м²/с = 104 ст = 106 сСт, где Ст — стокс.

Вязкость измеряется приборами, которые называются вискозиметрами.

Из других свойств жидкости отметим свойство растворять газы, которое характеризуется коэффициентом растворимости.

Это свойство описывается формулой:

$$\frac{W_{жр1}}{W_{жр2}} = K' \frac{p_2}{p_1}, \quad (14)$$

где $W_{жр1}$, $W_{жр2}$ — объемы жидкости, соответствующие давлениям p_1 , p_2 при температуре t ;

K' — коэффициент растворимости данного газа при той же температуре.

Например, при $t = 20$ °С и $p = 1$ атм вода содержит 1,6% растворенного воздуха.

Из (14) видно, что при уменьшении давления уменьшается вязкость в жидкости из-за роста выделенного газа кипения.

Кипения можно добиться двумя способами: повышением температуры при $p = \text{const}$ или снижением давления при $t = \text{const}$.

При давлении, которое соответствует давлению насыщенных паров жидкости ($t = \text{const}$), пар с поверхности жидкости начинает выделяться пузырями, как при температурном (обычном) кипении, такое кипение называется **холодным кипением**.

Сопротивление растяжения жидкостей возникает в дегазированных жидкостях.

Чем больше в жидкости нерастворенного газа, тем меньше модуль упругости жидкости. В последствиях этого явления мы убедимся при изучении движения жидкости в трубопроводах.

Поверхностное натяжение: из-за этого свойства жидкость стремится занимать наименьший объем, например, капли в шарообразных формах.

Это свойство порождает силы поверхностного натяжения, которые препятствуют растяжению жидкости на границе двух сред.

Силы поверхностного натяжения направлены по касательной к поверхности.

Размерность поверхностного натяжения — МТ^{-2} , то есть измеряется в Н/м.

Повышение температуры или добавление в жидкости плавающих веществ уменьшают силу поверхностного натяжения.

Это свойство жидкостей любопытным образом проявляет себя в капиллярах.

Если стенка капилляра смачивается, то форма поверхности — вогнутая: жидкость поднимается.

Если нет смачивания, то поверхность выпуклая и жидкость опускается по капилляру.

Высоту подъема (или спуска) считают по формуле:

$$h_{\text{кан}} = \frac{4\sigma \cos \theta}{\rho g d}, \quad (15)$$

где θ — острый угол между стенкой капилляра и касательной к свободной поверхности, проходящая через точку пересечения поверхности и стенкой капилляра;

d — диаметр капилляра.

Этим свойством воды подробно будем заниматься при изучении грунтовых вод.

В заключение приведем краткий список свойств жидкостей, которые рассмотрены выше.

1. Текучесть.
2. Сжимаемость.
3. Плотность.

4. Объемное сжатие.
5. Вязкость.
6. Температурное расширение.
7. Сопротивление растяжению.
8. Свойство растворять газы.
9. Поверхностное натяжение.

2. Силы, действующие в жидкости

Жидкости делятся на **покоящиеся** и **движущиеся**.

Здесь же рассмотрим силы, которые действуют на жидкость и вне ее в общем случае.

Сами эти силы можно разделить на две группы.

1. **Силы массовые.** По-другому эти силы называют силами, распределенными по массе: на каждую частицу с массой $\Delta M = \rho \Delta W$ действует сила ΔF , в зависимости от ее массы.

Пусть объем ΔW содержит в себе точку A . Тогда в точке A :

$$F_A = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\rho \Delta W}, \quad (16)$$

где F_A — плотность силы в элементарном объеме.

Плотность массовой силы — векторная величина, отнесена к единичному объему ΔW ; ее можно проецировать по осям координат и получить: F_x , F_y , F_z . То есть плотность массовой силы ведет себя, как массовая сила.

Примерами этих сил можно назвать силы тяжести, инерции (кориолисова и переносная силы инерции), электромагнитные силы.

Однако в гидравлике, кроме особых случаев, электромагнитные силы не рассматривают.

2. **Поверхностные силы.** Таковыми называют силы, которые действуют на элементарную поверхность $\Delta \omega$, которая может находиться как на поверхности, так и внутри жидкости; на поверхности, произвольно проведенной внутри жидкости.

Таковыми считают силы: силы давления \vec{P} , которые составляют нормаль к поверхности; силы трения \vec{T} , которые являются касательными к поверхности.

Если по аналогии (16) определить плотность этих сил, то: нормальное напряжение в точке A:

$$\vec{P}_A = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta \omega}. \quad (17)$$

касательное напряжение в точке A:

$$\vec{T}_A = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta \omega}. \quad (18)$$

И массовые, и поверхностные силы могут быть **внешними**, которые действуют извне и приложены к какой-то частице или каждому элементу жидкости; **внутренними**, которые являются парными и их сумма равна нулю.

3. Гидростатическое давление и его основные свойства

Общие дифференциальные уравнения равновесия жидкости — уравнения Л. Эйлера для гидростатики.

Если взять цилиндр с жидкостью (покоящейся) и провести через него линию раздела, то получим жидкость в цилиндре из двух частей. Если теперь приложить некоторое усилие к одной части, то оно будет передаваться другой через разделяющую плоскость сечения цилиндра: обозначим эту плоскость $S = w$.

Если саму силу обозначить как \vec{p} , то взаимодействие, передаваемое от одной части к другой через сечение Δw , и есть гидростатическое давление.

Если оценить среднее значение этой силы,

$$\vec{p}_{cp} = \frac{\vec{p}}{S} = \frac{\vec{p}}{w}. \quad (19)$$

А чему равна эта сила в некоторой точке A , принадлежащей сечению w ?

Из математики известно, что задачи такого рода решаются с помощью предела: рассмотрим точку A как предельный случай w , определяем:

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta w}. \quad (20)$$

Сила \vec{p} , и напряженность $\Delta \vec{p}$, всегда направлены вдоль нормали к площади Δw . В противном случае силу p можно было бы разложить на составляющие, нормальную и касательную, и последняя из-за свойства текучести жидкости привела бы ее в движение. Но мы не наблюдаем этого, например, в случае попадания капель жидкости на горизонтальную поверхность. Как видно из этого же примера, сила $\Delta \vec{p}$, которая действует на капли, сжимающая. При этом, если жидкость в равновесном состоянии, то сила $\Delta \vec{p}$ не зависит от ориентации сечения Δw . Попробуем это показать наглядно.

Возьмем небольшой объем в форме тетраэдра в равновесной жидкости и обозначим его стороны как Δx , Δy , Δz , предварительно совместив вершину тетраэдра (точка A) с началом координатной системы (точка O).

Из геометрии известно, что объем полученной фигуры

$$\Delta W = \frac{1}{6} \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (21)$$

Грани Δw_x , Δw_y , Δw_z тетраэдра в пересчете на площадь Δw лежат в координатных плоскостях, четвертая грань Δw_n наклонна к этим плоскостям и параллельна нормали \vec{n} к четвертой поверхности; на этом же направлении действует сила \vec{p}_r .

Но кроме нее, в том же направлении действует на Δw массовая сила $\vec{F} = \rho \Delta w$.

Эта сила имеет свою плотность, которая распределена по осям координат как F_x, F_y, F_z . Определим проекцию F_x :

$$\Delta P_x - \Delta P_n \cos(\hat{n}, x) + F_x \rho \Delta W = 0, \quad (22)$$

где (\hat{n}, x) — угол между нормалью и осью x ;

Δp_n — проекция силы \vec{p} на единичный нормаль \vec{n} .

Условие (22) представляет собой условие равновесной жидкости с объемом Δw : сумма ее первых двух членов является эквивалентом силы массы $F_x \rho \Delta W$, только с противоположным знаком. $\Delta P_n \cos(\hat{n}, x)$ — проекция силы массы на нормальное направление n ; $F_x \rho \Delta W$ — ее проекция на ось x .

Разделив (22) на Δw_x и учитывая, что

$$\Delta W = \frac{1}{6} \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (23)$$

$$\Delta w_x = \frac{1}{2} \Delta y \Delta z, \quad (24)$$

а также то, что с другой стороны Δw_x — площадь грани ABD , которая перпендикулярна оси x , после небольших преобразований получим:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p_x}{\Delta w_x} &= \frac{1}{\Delta w_n} - F_x \rho \frac{1}{3} \Delta x = \\ &= \frac{\Delta p_x}{\Delta w_x} = \frac{\Delta p_n}{\Delta w_n} - F_x \rho \frac{1}{3} \Delta x. \end{aligned} \quad (25)$$

Если перейти к пределу, то Δw переходит в точку A . Поэтому $\Delta p_x \rightarrow \Delta p_n$. В конечном результате $p_x = p_n$, точно так же можно получить $p_y = p_n, p_z = p_n$.

Следовательно,

$$p_y = p_n, p_z = p_n. \quad (26)$$

Мы доказали, что во всех трех направлениях (их мы выбрали произвольно) скалярное значение сил одно и то же, то есть не зависит от ориентации сечения Δw . Вот это скалярное значение приложенных сил и есть гидростатическое давление, о котором говорили выше: именно это значение, сумма всех составляющих, передается через Δw .

Другое дело, что в сумме $(p_x + p_y + p_z)$ какая-то составляющая окажется равной нулю.

Как мы в дальнейшем убедимся, в определенных условиях гидростатическое давление все же может быть неодинаково в различных точках одной и той же покоящейся жидкости, то есть

$$p = f(x, y, z). \quad (27)$$

Итак, как мы убедились выше, на выделенный объем внутри жидкости действуют поверхностные сжимающие и массовые силы. Например, на объем $dx dy dz$ с массой $\rho dx dy dz$ будут действовать силы $\rho \bar{F} \Delta W$ с проекциями на координатные оси F_x, F_y, F_z .

Но как нам определить гидростатическое давление?

Сперва определим проекцию давления на ось x . Для этого представим себе, что из выделенного объема удалена жидкость, а ее воздействие заменено силами (это и есть сжимающие силы). Объем имеет форму параллелепипеда.

Разложим давление в центре рассматриваемого объема в ряд Тейлора по приращению dx , оставив только первые два члена, получим выражение для значений этого давления на двух противоположных сторонах этого объема, перпендикулярных оси x :

$$p - \frac{\partial p}{\partial x} \times \frac{dx}{2}; \quad p + \frac{\partial p}{\partial x} \times \frac{dx}{2}.$$

Точно так же можно получить выражение давления по приращениям dy, dz .

В таком случае уравнение равновесия жидкости по оси x состоит из следующей суммы:

$$F_x \rho dx dy dz + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \times \frac{dx}{2} \right) dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \times \frac{dx}{2} \right) dy dz = 0. \quad (28)$$

После преобразования и сокращения на $dx dy dz$ получим:

$$F_x \rho = \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (29)$$

Если получить такие же уравнения по другим приращениям $dy dz$, то получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial x} = \rho F_x \right) \\ \left(\frac{\partial p}{\partial y} = \rho F_y \right) \\ \left(\frac{\partial p}{\partial z} = \rho F_z \right) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Полученная система уравнений — **уравнения Эйлера**.

Из вышеуказанного примера следует, что легко получить уравнение равновесия жидкости в виде (29), то есть

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho F_n. \quad (31)$$

4. Поверхности равного давления и их свойства

Мы установили, что есть гидростатическое давление, и определили следующие его свойства.

1. Гидростатическое давление всегда направлено по нормали к поверхности и его величина не зависит от ориентации поверхности.

2. Внутри покоящейся жидкости в любой точке гидростатическое давление направлено по внутренней нормали к площадке, проходящей через эту точку. Причем $p_x = p_y = p_z = p_n$.

3. Для любых двух точек одного и того же объема однородной несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$)

$$p_1 + \rho\Pi_1 = p_2 + \rho\Pi_2, \quad (32)$$

где ρ — плотность жидкости;

Π_1, Π_2 — значение поле массовых сил в этих точках.

Получим уравнение (32). Для этого систему уравнений Эйлера (30) умножим: первое уравнение на dx , второе — на dy , третье — на dz . Сложив, получим:

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho(F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (33)$$

Если бы мы взяли произвольную функцию $p = f(x, y, z)$ и нашли от нее полный дифференциал dp , то получили бы сумму левой части (33). Поэтому запишем (33) в следующем виде:

$$dp = \rho(F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (34)$$

В течение всего настоящего курса гидростатики мы рассматриваем однородную сжимаемую и несжимаемую жидкость: для такой жидкости $\rho = \text{const}$. В таком случае, в правой части сумму можно рассмотреть как полный дифференциал, что значит, если принимать:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

то

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU,$$

где $U(x, y, z) = f$ — плотность силы масс, то есть поля массовых сил.

С учетом вышеприведенного, из (34) следует:

$$dp = \rho dU. \quad (35)$$

Но, поскольку поля массовых сил характеризуется потенциальной энергией $\Pi(x, y, z)$, то (35) можно написать в виде:

$$dp = -\rho d\Pi. \quad (36)$$

Если взять интеграл из (36), получим:

$$p = -\rho\Pi + c, \quad (37)$$

откуда

$$p + \rho\Pi = c,$$

то есть для одного и того же объема:

$$p_1 + \rho\Pi_1 = p_2 + \rho\Pi_2. \quad (38)$$

Из уравнения (38) следует, что в жидкости существуют бесконечно малые слои, где давление одинаково для всех ее точек.

Убедимся в этом.

Если предположить в уравнении (34), что $p = \text{const}$, то $dp = 0$, следовательно поскольку $\rho \neq 0$, то

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0,$$

что одно и то же (35) и (36)

$$\Pi(x, y, z) = \text{const}. \quad (39)$$

Мы получили уравнение поверхности, во всех точках которой $p = \text{const}$, то есть одинаковы.

Поверхность, для любых двух точек которой давление одно и то же, называется **поверхностью равного давления**.

Поверхность жидкости, которая находится на границе двух сред, например, с воздухом, также рассматривается как поверхность равного давления.

В заключении лекции, возвращаясь к системе уравнений Эйлера, следует сказать о ее физическом смысле: это уравнение определяет взаимоотношение поверхностных и объемных сил в любой точке однородной несжимаемой жидкости. Причем это уравнение описывает состояние равновесия и для сжимаемой жидкости.

ЛЕКЦИЯ № 2. Однородная несжимаемая жидкость

1. Равновесие однородной несжимаемой жидкости под воздействием силы тяжести

Это равновесие описывается уравнением, которое называется основным уравнением гидростатики. Наша цель — получить это уравнение.

Если рассмотреть сосуд с покоящейся жидкостью, то на нее действует сила атмосферного давления \vec{p} и $\vec{S} = \vec{g}M$ (сила ее массы). Что касается плотности этой силы \vec{Q} , то это $\vec{F} = \vec{g}$.

Выразим в декартовой системе координат:

$$F_x = 0, F_y = 0, F_z = -g. \quad (40)$$

Учтя (40), в (34) получим:

$$dp = -\rho g dz. \quad (41)$$

Поскольку, $\rho = \text{const}$, и изменением g от высоты в данном случае пренебрегаем, то есть $g = \text{const}$, то проинтегрировав (41), получим:

$$p = -\rho g z + c. \quad (42)$$

где c — постоянная интегрирования.

Следим, как поведет себя уравнение (42) в случае, если мы его применим к единице веса.

Для этого разделим его на $\rho g'$:

$$z + \frac{p}{\rho g} = \text{const}. \quad (43)$$

Если отнести уравнение (42) к единице массы, то придется разделить ее на ρ

$$gz + \frac{p}{\rho} = \text{const.} \quad (44)$$

Если рассмотрим полученные уравнения для любых двух точек одного и того же объема, то

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g}, \quad (45)$$

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho}. \quad (46)$$

Полученные уравнения описывают распределение давления в жидкости, которая находится в равновесном состоянии. Из них уравнение (45) является основным уравнением гидростатики.

Для водоемов больших объемов или поверхности требуется уточнения: сонаправлен ли \vec{g} радиусу Земли в данной точке; насколько горизонтальна рассматриваемая поверхность.

Возьмем любую точку A , высота которой z , со значением давления p в этой точке, которое и нужно определить.

Для этого возьмем точку B на свободной поверхности с высотой z_0 и с давлением p_0 . Используя эту точку, определим p , причем по сравнению с атмосферным $p_0 < p_{\text{атм}}$, $p_0 > p_{\text{атм}}$, $p_0 = p_{\text{атм}}$.

Согласно уравнению (45)

$$z + \frac{p}{\rho g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho g}, \quad (47)$$

находим, что

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z). \quad (48)$$

Очевидно, что $z_0 - z = h$ — высота, которая характеризует глубину погружения точки A под свободную поверхность. Следовательно,

$$p = p_0 + \rho gh, \quad (49)$$

где ρgh — весовое давление, которое соответствует единичной высоте и единичной площади.

Другими словами, давление в точке A является суммой внешнего давления (в данном случае p_0) и веса столба ρgh .

Нередко давление p называют **абсолютным давлением** $p_{\text{абс}}$.

Если $p > p_{\text{абс}}$, то $p - p_{\text{атм}} = p_0 + \rho gh - p_{\text{атм}}$ — его называют **избыточным давлением**:

$$p_{\text{изч}} = p - p_0, \quad (50)$$

если $p < p_{\text{атм}}$, то говорят о разности в жидкости

$$p_{\text{вак}} = p_{\text{атм}} - p, \quad (51)$$

называют **вакуумметрическим давлением**.

На свободной поверхности и $p_0 = p_{\text{атм}}$, поэтому

$$p_{\text{изч}} = \rho gh. \quad (52)$$

Что произойдет в других точках жидкости, если приложим некоторое усилие Δp ? Если выбрать две точки, и приложить к одной из них усилие Δp_1 , то согласно формуле (45), то есть по основному уравнению гидростатики, во второй точке давление изменится на Δp_2 .

$$z_1 + \frac{p_1 + \Delta p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2 + \Delta p_2}{\rho g}, \quad (53)$$

откуда легко заключить, что при равенности прочих слагаемых должно быть

$$\Delta p_1 = \Delta p_2. \quad (54)$$

Мы получили выражение закона Паскаля, который гласит: изменение давления в любой точке жидкости в равновесном состоянии передается во все остальные точки без изменений.

До сих пор мы исходили из предположения, что $\rho = \text{const}$. Если иметь сообщающийся сосуд, который заполнен двумя жидкостями с $\rho_1 \neq \rho_2$, причем внешнее давление $p_0 = p_1 = p_{\text{атм}}$, то согласно (53):

$$\rho_1 gh = \rho_2 gh, \quad (55)$$

откуда

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad (56)$$

где h_1, h_2 — высота от раздела поверхности до соответствующих свободных поверхностей.

Единицы измерения давления

Мы до сих пор не дали определения давлению: давление — физическая величина, которая характеризует силы, направленные по нормали к поверхности одного предмета со стороны другого.

Если силы распределены нормально и равномерно, то давление

$$\vec{p} = \frac{\vec{F}}{S}, \quad (57)$$

где \vec{F} — суммарная приложенная сила;

S — поверхность, к которой приложена сила.

Если силы распределены неравномерно, то говорят о среднем значении давления или считают его в отдельно взятой точке: например, в вязкой жидкости.

Для того, чтобы определить среднее значение давления нужно суммировать его проекции по осям.

Давление измеряется с помощью пьезометров, манометров и вакуумметров, о которых расскажем чуть позже.

Единицы измерения давления следующие:

1 Паскаль — 1Н/м^2

1 Бар — 10^5дин/см^2

$\text{кг} \times \text{с/см}^2$ — 1 атмосфера

1 Атм. — 760 мм рт.ст.

Мм рт. ст. — высота столбца с ртутью

Мм вод. ст. — высота столбца с водой.

Если говорить о физическом смысле единицы Паскаль, то это сила в 1 Ньютон, приложенная к площади 1 кв. м.

Преобразовав 1 паскаль = 1Н м/м^3 , получим 1Дж/м^3 .

При измерении больших давлений используют единицу мега паскаль (МПа).

Приборы для измерения давления

Одним из приборов, которым измеряют давление, и о котором сказано выше, является манометр. Это U-образная стеклянная труба диаметром 10—15 мм. Один конец трубы свободный, другой конец присоединяется к точке, в которой необходимо измерять давление. Разность давлений в концах трубки $p_2 - p_1$ может быть уравновешена противодействием ρgh (или весовым давлением), то есть:

$$p_2 - p_1 = \rho gh, \quad (58)$$

откуда

$$p_2 = p_1 + \rho gh. \quad (59)$$

Как видно из (59), достаточно знать высоту h , поскольку p_1 задано, чтобы вычислить p_2 .

Для определения на трубы прикрепляется специальная шкала.

Недостатком манометров является то, что у них небольшой диапазон измерений: 1—10 кПа.

По этой причине в трубах используют жидкости, которые «уменьшают» высоту, например, ртуть.

Например, если требуется измерять давление 1,5 атм (0,15 МПа), то требуется манометр, трубы у которого имеют высоту 15 мм.

Ртуть же уменьшает эту высоту в 13,6 раз.

Для измерения еще больших давлений пользуются пружинными манометрами.

Следующим прибором для измерения давления является пьезометр. Возможно, кому-то из вас пришлось проделать следующий опыт: если возьмем резиновую или хлорвиниловую трубку произвольной длины, заполним водой, затем, закрыв один конец пальцем, оставим другой конец свободным и поднимем трубку, вода не выльется.

Вода не будет выливаться, даже если между жидкостью и другим закрытым концом будет воздушный зазор; может даже подниматься к закрытому концу трубы. Вот это последнее зависит от атмосферного или другого, если проводится специальный эксперимент, давления. Именно по этому принципу работают пьезометры: на свободный конец трубы действует измеряемое давление.

Это же является причиной того, почему в узкой трубе уровень жидкости выше, чем в самом сосуде.

Сосуд и ответвление от него на глубине h_A со свободной поверхностью, образуют систему сообщающихся сосудов.

Высота свободной поверхности в узкой трубке поднимается на $h_H > h_A$ потому, что атмосферное давление $p_1 > p_2$, где p_1, p_2 — соответствующие давления, действующие на свободные поверхности сосуда и трубы. $p_1 > p_2$ потому, что площадь свободной поверхности у сосуда больше, чем у трубы, причем разность давлений $p_1 - p_2 \sim h_H$. Высоту напора принято называть **пьезометрической высотой**, или **напором**.

Рассмотрим следующие случаи.

1. Мы уже видели, что происходит при $p_1 > p_2, h_H > h_A, h_A$ — потому что трубка соединена с сосудом на уровне точки А.

Для нахождения h_H воспользуемся условием равновесной жидкости. В данном случае система представляет собой равновесную систему.

Согласно основному уравнению гидростатики,

$$p_1 + \rho g h_A = p_2 + \rho g h_H,$$

где ρ — плотность жидкости;

g — ускорение свободного падения.

p_2 , как правило, задается $p_2 = p_{атм}$, поэтому, зная h_A и h_H , трудно определить искомую величину.

2. $p_1 = p_2 = p_{атм}$. Совершенно очевидно, что из $\rho = \text{const}$, $g = \text{const}$ следует, что $h_A = h_H$. Этот факт называют также законом сообщающихся сосудов.

3. $p_1 < p_2 = p_{атм}$.

Между поверхностью жидкости в трубе и ее закрытым концом образуется вакуум. Такие приборы называют вакуумметры; их используют для измерения давлений, которые меньше атмосферного. На практике вакуум в приборах устанавливается еще изготовителем; результатом измерения является: установить, насколько изменится этот вакуум.

На нижнюю оконечность трубы, что находится в жидкости в большом сосуде, действует давление p_B . Тогда давление на свободной поверхности трубки, точнее, в самом вакуумметре, p_B , и искомое атмосферное давление p_a связаны, поскольку на нижнее сечение трубки в жидкости оказывается не только усилие p_B и $\rho g h$, но точно такое же по величине

$$p_{атм} = p_B + \rho g h. \quad (60)$$

Теперь несложно определить высоту, которая и является характеристикой изменения вакуума:

$$h = \frac{p_{атм} - p_B}{\rho g}. \quad (61)$$

Как следует из этой же формулы, ρ и g постоянные, h — характеристика степени разреженности в приборе. $p_{\text{вак}} = p_a + p_B$ — такова разность между атмосферным давлением и давлением в трубке.

Вакуум измеряется в тех же единицах, что и давление.

Пьезометрический напор

Вернемся к основному гидростатическому уравнению. Здесь z — координата рассматриваемой точки, которая отсчитывается от плоскости XOY . В гидравлике плоскость XOY называется плоскостью сравнения.

Отсчитанную от этой плоскости координату z называют по-разному: геометрической высотой; высотой положения; геометрическим напором точки z .

В том же основном уравнении гидростатики величина $p/\rho gh$ — также геометрическая высота, на которую поднимается жидкость в результате воздействия давления p .

$p/\rho gh$ так же, как и геометрическая высота, измеряется в метрах. В случае, если через другой конец трубы на жидкость действует атмосферное давление, то жидкость в трубе поднимается на высоту $p_{\text{изб}}/\rho gh$, которую называют **вакуумметрической высотой**.

Высоту, соответствующую давлению $p_{\text{вак}}$, называют **вакуумметрической**.

В основном уравнении гидростатики сумма $z + p/\rho gh$ — гидростатический напор H , различают также пьезометрический напор H_n , который соответствует атмосферному давлению $p_{\text{атм}}/\rho gh$:

$$H_n < H.$$

В гидравлике оперируют еще следующими понятиями: **плоскость гидростатического напора** — геометрическое место концов вертикалей длиной $z + p/\rho gh$ от плоскости сравнения; **плоскость пьезометрического напора** — геометрическое место концов вертикали с длиной $z + p_{\text{изб}}/\rho gh$.

Плоскость пьезометрического напора может совпадать со свободной поверхностью, если $p_0 = p_{атм}$, в других случаях положение плоскости определяется в зависимости от $p_0 > p_A$ или $p_0 < p_A$.

2. Гидравлический пресс

Гидравлический пресс служит для совершения на коротком пути большей работы. Рассмотрим работу гидравлического пресса.

Для этого, чтобы совершалась работа над телом, надо воздействовать на поршень с некоторым давлением P . Это давление, как и P_2 , создается следующим образом.

Когда поднимается поршень насоса с площадью нижней поверхности S_2 , то он закрывает первый клапан и открывает второй. После заполнения цилиндра водой второй клапан закрывается, открывается первый. В результате вода через трубу заполняет цилиндр и давит на поршень с помощью нижнего сечения S_1 с давлением P_2 . Это давление, как давление P_1 , сжимает тело.

Совершенно очевидно, что P_1 — это то же самое давление, что и P_2 , разница только в том, что они воздействуют на разные по величине площади S_2 и S_1 .

Другими словами, давления:

$$P_1 = pS_1 \text{ и } P_2 = pS_2. \quad (62)$$

Выразив $p = P_2/S_2$ и подставив в первую формулу, получим:

$$P_1 = P_2 = \frac{S_1}{S_2}. \quad (63)$$

Из полученной формулы следует важный вывод: **на поршень с большей площадью S_1 со стороны поршня с меньшей площадью S_2 передается давление во столько раз большее, во сколько раз $S_1 > S_2$.**

Однако на практике из-за сил трения до 15% этой передаваемой энергии теряется: тратится на преодоление сопротивления сил трения.

И все же у гидравлических прессов **коэффициент полезного действия $\eta = 85\%$** — достаточно высокий показатель.

В гидравлике формула (63) переписывается в следующем виде:

$$R = \eta P_2 \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (64)$$

где P_1 обозначено как R ;

$$S_1 = \omega_1;$$

$$S_2 = \omega_2.$$

Гидравлический аккумулятор

Гидравлический аккумулятор служит для поддержания давления в подключенной к нему системе постоянным.

Достижение постоянства давления происходит следующим образом: сверху на поршень, на его площадь ω , действует груз P .

Труба служит для передачи этого давления по всей системе.

Если в системе (механизме, установке) жидкости в избытке, то избыток по трубе поступает в цилиндр, поршень поднимается.

При недостатке жидкости поршень опускается, и создаваемое при этом давление p , по закону Паскаля, передается на все части системы.

Давление во всей системе постоянно, потому что $p = P/\omega = \text{const}$ в силу постоянства веса груза P и площади поршня ω .

ЛЕКЦИЯ № 3. Условия устойчивого равновесия и плавания тел

1. Определение силы давления покоящейся жидкости на плоские поверхности. Центр давления

Для того, чтобы определить силу давления, будем рассматривать жидкость, которая находится относительно Земли. Если выбрать в жидкости произвольную горизонтальную площадь ω , то, как мы убедились в лекции № 2, при условии, что на свободную поверхность действует $p_{атм} = p_0$, на ω оказывается избыточное давление:

$$P_{изб} = \rho gh\omega. \quad (65)$$

Поскольку в (65) $\rho gh\omega$ есть не что иное, как mg , так как $h\omega$ и $\rho V = m$, избыточное давление равно весу жидкости, заключенной в объеме $h\omega$. Линия действия этой силы проходит по центру площади ω и направлена по нормали к горизонтальной поверхности.

Формула (65) не содержит ни одной величины, которая характеризовала бы форму сосуда. Следовательно, $P_{изб}$ не зависит от формы сосуда. Поэтому из формулы (65) следует чрезвычайно важный вывод, так называемый **гидравлический парадокс** — при разных формах сосудов, если на свободную поверхность оказывается одно и тоже p_0 , то при равенстве плотностей ρ , площадей ω и высот h давление, оказываемое на горизонтальное дно, одно и то же.

При наклонности плоскости дна имеет место смачивание поверхности с площадью ω . Поэтому, в отличие от предыдущего случая, когда дно лежало в горизонтальной плоскости, нельзя сказать, что давление постоянно.

Чтобы определить его, разобьем площадь ω на элементарные площади $d\omega$, на любую из которых действует давление \vec{p} .

По определению силы давления,

$$\vec{p}d\omega = \vec{dP}, \quad (66)$$

причем \vec{dP} направлено по нормали к площадке ω .

Теперь, если определить суммарную силу \vec{P} , которая действует на площадь ω , то ее величина:

$$P_{abc} = \int_{\omega} (p_0 + \rho gh) d\omega = p_0\omega + \int_{\omega} \rho gh d\omega. \quad (67)$$

Определив второе слагаемое в (6) найдем P_{abc} .

Неизвестным является глубина h , выразив ее через расстояние от оси O_Y до элементарной площади $d\omega$, $l = h \sin\theta$, с учетом $\rho g = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ получим:

$$\int_{\omega} \rho gh d\omega = \rho g \sin\theta \int_{\omega} l d\omega. \quad (68)$$

Интеграл $\int_{\omega} l d\omega$ можно рассматривать как **статистический момент** площади ω относительно линии уреза (ось O_Y).

В этом случае $l = l_{u.e.}$ называют **плечом момента**. Тогда с учетом вышесказанного:

$$\int_{\omega} h d\omega = \int_{\omega} \sin\theta l d\omega = \sin\theta l_{u.m.} \omega = h_{u.m} \omega. \quad (69)$$

С учетом (69), из (67) следует:

$$P_{abc} = \omega(p_0 + h_{u.e}). \quad (70)$$

Получили искомые выражения для определения давлений, действующих на горизонтальную и наклонную плоскости: $P_{изб}$ и $P_{абс}$.

Отметим следующие положения:

- 1) структурное подобие формул (65) и (70) очевидно: только в (65) входит h — глубина погружения горизонтальной плоскости; в (70) входит $h_{ц.г.}$ — глубина погружения наклоненной плоскости, точнее, центр тяжести смоченной площади поверхности. То есть глубины погружения h и $h_{ц.г.}$ принципиально разные;
- 2) линия действия силы \vec{P} во втором случае, проходит через точку, которую называют **центром давления**, причем центры тяжести и давления не совпадают (по крайней мере, в нижнем случае).

Тогда возникает естественный вопрос: каковы координаты центра давления? Рассмотрим еще одну точку C , которая принадлежит площади ω , точнее, точку центра тяжести смоченной площади ω . В этой точке действует сила $\vec{P}_0 = \rho_0 \omega$. Сила \vec{P} действует в любой другой точке, которая не совпадает с точкой C .

2. Определение силы давления в расчетах гидротехнических сооружений (плотины, плоские затворы и прочее)

При расчетах в гидротехнике интерес представляет сила избыточного давления P , при:

$$p_0 = p_{атм}, \quad (71)$$

где p_0 — давление, приложенное к центру тяжести.

Говоря о силе, будем иметь в виду силу, приложенную в центре давления, хотя будем подразумевать, что это — сила избыточного давления.

Для определения $\vec{P}_{абс}$ воспользуемся **теоремой моментов**, из теоретической механики: момент равнодействующей относительно

произвольной оси равен сумме моментов составляющих сил относительно той же оси.

Если предположить, что площадь ω имеет вертикальную ось симметрии, то центр давления будет находиться на этой оси.

На наклонной плоскости, содержащей площадку ω , проекцией (то есть проекцией оси вертикальной симметрии) будет ось O_L , заменяющая ось O_x , а центром давления — точка D .

Теперь, согласно вышеуказанной теореме о равнодействующем моменте:

$$pl_{u.d.} = \int l dp. \quad (72)$$

Поскольку при $p_0 = p_{амм}$, $P = \rho gh_{u.e.} \omega$, поэтому $dP = \rho gh d\omega = \rho g \sin \theta l d\omega$, следовательно (здесь и далее для удобства не будем различать $p_{изб}$ и $p_{абс}$), с учетом P и dP из (72) следует:

$$\rho gh_{u.m.} \rho l_{u.d.} = \int \rho g \sin \theta l^2 d\omega = \rho g \sin \theta \int l^2 d\omega = \rho g \sin \theta I_y, \quad (73)$$

где $h_{u.m.}$ — глубина погружения центра тяжести;

$l_{u.d.}$ — расстояние от линии уреза до центра давления D .

Теперь, выразив $l_{u.d.}$ из уравнения (73), получим:

$$l_{u.d.} = \frac{\sin \theta I_y}{\omega h_{u.e.}} = \frac{\sin \theta}{h_{u.m.}} \times \frac{I_y}{\omega}. \quad (74)$$

Поскольку $\frac{\sin \theta}{h_{u.m.}} = \frac{1}{l_{u.m.}}$, то:

$$l_{u.d.} = \frac{I_y}{\omega l_{u.m.}}. \quad (75)$$

Нами определен момент инерции центра тяжести $\omega l_{u.m.}^2$. Если теперь перенесем ось момента инерции, то есть линию уреза жид-

кости (ось O_y) в центр тяжести ω , то есть в точку C , то относительно этой оси момент инерции центра давления точки D будет J_0 .

Поэтому выражение для центра давления (точка D) без переноса оси момента инерции от той же линии уреза, совпадающие с осью O_y , будет иметь вид:

$$I_y = I_0 + \omega l_{u.m.}^2. \quad (76)$$

С учетом формулы (76) из формулы (75) получаем:

$$l_{u.d.} = l_{u.m.} + I_0 / \omega l_{u.m.}. \quad (77)$$

Обозначив **статистический момент**:

$$S = \omega l_{u.z.}, \quad (78)$$

и подставив в формулу (77), получим окончательную формулу для определения места расположения центра давления от оси уреза жидкости:

$$l_{u.d.} = l_{u.z.} + I_0 / S. \quad (79)$$

Окончательная формула для $l_{u.d.}$ позволяет определить центр давления при расчетах гидротехнических сооружений: для этого разбивают участок на составные участки, находят для каждого участка $l_{u.d.}$ относительно линии пересечения этого участка (можно пользоваться продолжением этой линии) со свободной поверхностью.

Центры давления каждого из участков находятся ниже центра тяжести смоченной площади по наклонной стенке, точнее по оси симметрии, на расстоянии $I_0 / \omega l_{u.u.}$.

3. Общий прием определения сил на криволинейные поверхности (давление на цилиндрические поверхности).

Закон Архимеда

Для выяснения действия силы на криволинейную поверхность необходимо решить следующую задачу: рассмотрев частный слу-

чай, определив силы давления на стенки цилиндра со стороны жидкости, которая находится в равновесном состоянии, обобщить полученный результат для его прикладного применения в общем случае, независимо от конкретной формы поверхности.

Эта задача имеет большое практическое значение: в большинстве случаев в сооружениях гидротехники встречаются именно такие нестандартные, неправильные формы поверхности, влияние которых нужно учитывать.

Если теперь представить себе цилиндр с жидкостью в равновесии, то в каждой точке внутренней поверхности действующая сила также направлена по нормали, но о параллельности этих сил говорить уже не приходится: как радиусы окружности, так и направленные по ним силы не могут быть параллельными и пересекаются в ее центре.

1. Разбив стенку цилиндра на элементарные площадки, предполагаем, что они плоские. Тогда на них оказывает воздействие элементарная сила давления

$$dP = \rho d\omega, \quad (80)$$

которая направлена по радиусу.

Если координатную систему расположить по другому то очевидно, что:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}, \quad (81)$$

согласно теореме Пифагора.

Горизонтальная составляющая силы P

$$P_x = \rho g h d\omega, \quad (82)$$

а вертикальная —

$$z' = \rho g h d\omega_{z'}, \quad (83)$$

где $p = \rho g h$.

Проинтегрировав (82) и (83), получим:

$$P_x = \rho g h_{u.m.} d\omega_x, \quad (84)$$

где ω_x — проекция всей цилиндрической поверхности на нормальную к оси O_x плоскость;

$h_{u.m.}$ — глубина центра тяжести проекции ω_x над пьезометрической плоскостью для вертикальной составляющей:

$$P_z = \rho g \int_{\omega_x} z d\omega_z, \quad (85)$$

$\int_{\omega_x} z d\omega_z$ — объем призмы, которую называют также **телом давления**.

Чтобы получить это тело, следует проектировать его основание — сектор на пьезометрическую плоскость: полученная проекция ограничивает тело сверху, в итоге получается как бы объемный сектор. Обозначим этот объем как $W_D = \int_{\omega_z} z d\omega_z$, тогда:

$$P_z = \rho g W_D, \quad (86)$$

Если P_x проходит через центр давления ω_x , то P_z проходит через центр тела призмы (тела давления); правда, это несколько сложно заключить.

Если провести параллельные плоскости, содержащие P_x и P_z , причем плоскость, содержащая P_x , также перпендикулярна к площадке ω_x , то очевидно, что эти плоскости перпендикулярны и расстояние между ними равно CD ; обе они перпендикулярны к площадке ω_x .

Направления линий действия силы зависят от направляющих косинусов следующего вида:

$$\cos(\vec{P}, O_X) = \frac{P_x}{P}; \quad (87)$$

$$\cos(\vec{P}, O_Z) = \frac{P_z}{P}. \quad (88)$$

Таким образом, формулами (84) и (87) искомая сила давления на цилиндрическую поверхность с горизонтальной образующей полностью определена. В рассматриваемом случае ось O_Y была направлена параллельно горизонтальной образующей.

2. Теперь рассмотрим цилиндрическую поверхность с вертикальной образующей и направим ось O_Z параллельно этой образующей, что значит $\omega_z = 0$.

Поэтому по аналогии, как и в предыдущем случае,

$$\left. \begin{aligned} P &= \sqrt{P_x^2 + P_y^2} \\ P_x &= \rho g h'_{u.m.} \omega_x \\ P_y &= \rho g h''_{u.m.} \rho_y \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

где $h'_{u.m.}$ — глубина центра тяжести проекции под пьезометрическую плоскость;

$h''_{u.m.}$ — то же самое, только для ω_y .

Аналогично, направление \vec{P} определяется направляющими косинусами

$$\left. \begin{aligned} \cos(\vec{P}, OX) &= P_x / P; \\ \cos(\vec{P}, OY) &= P_y / P. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Если рассмотреть цилиндрическую поверхность, точнее, объемный сектор, с радиусом r и высотой h , с вертикальной образующей, то

$$\begin{aligned} \omega_x &= h_y, \\ h'_{u.m.} &= 0,5h. \end{aligned}$$

3. Нам осталось обобщить полученные формулы для прикладного применения произвольной криволинейной поверхности.

Выше мы, рассмотрев частные случаи, приравняли разные составляющие силы к нулю, в зависимости от того, какая ось направлена по образующей.

Однако в общем случае ни одна из составляющих P_x , P_y , P_z не равна нулю: ни вертикальная, ни горизонтальная.

Следовательно, согласно формулам, полученным выше по частным случаям,

$$\begin{aligned} P_x &= \rho g h'_{u.m.} \omega_x; \\ P_y &= \rho g h''_{u.m.} \omega_y; \\ P_z &= \rho g \omega_g; \\ P &= \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}. \end{aligned} \quad (91)$$

Система уравнений (91) является логическим объединением формул для частных случаев, то есть формул (86) и (89).

Что касается линии действия в случае пересечения составляющих, то жидкость действует всего одной силой — силой \vec{P} : как она направлена?

Это направление определяется углами между \vec{P} и ее составляющими по координатным осям. Косинусы для этих углов также придется объединить в систему:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{P}, OX) &= \frac{P_x}{P}; \\ \cos(\vec{P}, OY) &= \frac{P_y}{P}; \\ \cos(\vec{P}, OZ) &= \frac{P_z}{P}. \end{aligned} \quad (92)$$

4. Закон Архимеда. Условия плавучести погруженных тел

Следует выяснить условия равновесия погруженного в жидкость тела и следствия, вытекающие из этих условий.

Для этого воспользуемся теми результатами, которые мы получили на этой лекции ранее.

Если теперь погрузить в жидкость некоторое тело с объемом W_T и такой формой, что любая прямая, проходящая через тело, будет пересекать его в двух или более точках, то как поведет сила \vec{P} себя в отношении погруженного тела?

Эта сила будет давить на тело со всех сторон, при этом очевидно, что составляющие по горизонтали P_x, P_y будут взаимно уравновешиваться, а вертикальная составляющая P_z будет уравновешена силой тяжести G_T . В результате установится равновесное состояние погруженного тела.

Разберемся с вертикальной составляющей. Снизу на тело будет действовать выталкивающая сила, равная по весу объему жидкости, которая содержалась бы в объеме самого тела: пусть этот объем W_T . На тело действует еще внешняя сила, которая приложена к центру давления.

Другими словами, P_z состоит из двух сил. Одна сила, обозначим ее P_{z2} , направлена вверх: она равна весу жидкости, которая содержится в объеме тела $W_2 = W_1 + W_T$, то есть:

$$P_{z2} = \rho g W_2. \quad (93)$$

Если W_2 охватывает не только объем тела давления, но и не входящую в этот объем часть объема W_m погруженного тела, то в W_1 входит только объем тела давления (это тело находится выше плоскости, которую и проектируем на свободную поверхность).

В итоге, $W_2 = W_1 + W_T$. И очевидно, что:

$$P_{z1} = \rho g W_1. \quad (94)$$

Какая же сила действует на погруженное тело? Это равнодействующая вертикальных составляющих P_{z1} , P_{z2} , она равна силе тяжести, которая соответствует жидкости в объеме W_T ; поскольку $W_2 = W_1 + W_T$, то $W_T = W_2 - W_1$. Этой же формуле соответствует взаимоотношение вертикальных составляющих, то есть:

$$P_{z1} = P_{z1} - P_{z2} = \rho g W_T. \quad (95)$$

Полученное выражение характеризует силу, которую принято называть **архимедовой силой**.

Архимедовой силой является сила, равная весу погруженного тела (или его части): эта сила приложена в центр тяжести, направлена вверх и количественно равна весу жидкости, вытесненной погруженным телом или его частью. Мы сформулировали **закон Архимеда**.

Теперь разберемся с **основными условиями плавучести тела**.

1. Объем жидкости, вытесненной телом, называется **объемным водоизмещением**. Центр тяжести объемного водоизмещения совпадает с центром давления: именно в центре давления приложена равнодействующая сил.

2. Если тело погружено полностью, то объем тела W совпадает с W_T , если нет, то $W < W_T$, то есть $P_z = \rho g W$.

3. Тело будет плавать только в том случае, если вес тела

$$G_T = P_z = \rho g W, \quad (96)$$

то есть равен архимедовой силе.

4. Плавание:

1) **подводное**, то есть тело погружено полностью, если согласно (35) $P = G_T$, что означает (при однородности тела): $\rho g W = \rho_T g W_T$, откуда

$$\frac{W}{W_T} = \frac{\rho_T}{\rho}, \quad (97)$$

где ρ, ρ_T — плотность жидкости и тела соответственно;

W — объемное водоизмещение;

W_T — объем самого погруженного тела.

Совершенно очевидно, что если тело погружено полностью и плавает, то $W = W_T$, следовательно $\rho_T = \rho$;

2) **надводное**, когда тело погружено частично; при этом глубину погружения низшей точки смоченной поверхности тела называют **осадкой плавающего тела**.

Ее можно определить, пользуясь выражениями (96) и (97).

Ватерлинией называют линию пересечения погруженного тела по периметру со свободной поверхностью жидкости.

Площадью ватерлинии называется площадь погруженной части тела, ограниченной ватерлинией.

Линию, которая проходит через центры тяжести тела и давления, называют **осью плавания**, которая при равновесии тела вертикальна.

В том случае, если тело имеет плоскость симметрии, то она содержит ось плавания.

5. *Метацентр и метацентрический радиус*

Способность тела восстанавливать свое первоначальное равновесное состояние после прекращения внешнего воздействия называют **остойчивостью**.

По характеру действия различают **статистическую** и **динамическую** **остойчивость**.

Поскольку мы находимся в рамках гидростатики, то и разберемся со статистической **остойчивостью**.

Если образовавшийся после внешнего воздействия крен необратим, то **остойчивость неустойчива**.

В случае сохранения после прекращения внешнего воздействия, равновесие восстанавливается, то **остойчивость устойчива**.

Условием статистической **остойчивости** является плавание.

Если плавание **подводное**, то центр тяжести должен быть расположен ниже центра водоизмещения на оси плавания. Тогда те-

ло будет плавать. Если **надводное**, то остойчивость зависит от того, на какой угол θ повернулось тело вокруг продольной оси.

При $\theta < 15^\circ$, после прекращения внешнего воздействия равновесие тела восстанавливается; если $\theta \geq 15^\circ$, то крен необратим.

Дело в том, что при крене центр давления (что то же самое, что водоизмещение), отходит от оси плавания: ось плавания жестко связана с равновесием плавающего тела.

Получается, что архимедова сила по-прежнему проходит через центр давления. Однако центр тяжести на оси плавания уже не находится на одной линии с центром давления и архимедовой силой \vec{P} .

Точку пересечения архимедовой силы \vec{P} с осью плавания называют **метацентром**: при этом \vec{P} проходит также через центр давления.

Метацентрическим радиусом называют радиус окружности, частью которой является дуга, по которой центр давления перемещается в метацентр.

Приняты обозначения:

метацентр — M , метацентрический радиус — γ_m .

При $\theta < 15^\circ$

$$\gamma_m = \frac{I_0}{W}, \quad (98)$$

где I_0 — центральный момент плоскости относительно продольной оси, заключенной в ватерлинии.

После введения понятия «метацентр» условия остойчивости несколько изменяются: выше говорили, что для устойчивой остойчивости центр тяжести должен находиться выше центра давления на оси плавания. Теперь предположим, что центр тяжести не должен находиться выше метацентра. В противном случае силы \vec{P} и \vec{G} будут увеличивать крен.

Как очевидно, при крене расстояние δ между центром тяжести и центром давления меняется в пределах $\delta < \gamma_m$.

Это то же, что

$$\frac{\delta}{\gamma_m} < 1. \quad (99)$$

При этом расстояние между центром тяжести и метацентром называют **метацентрической высотой**, которая при условии (99) положительна. Чем больше метацентрическая высота, тем меньше вероятность крена плавающего тела. Наличие устойчивости относительно продольной оси плоскости, содержащей в себе ватерлинию, является необходимым и достаточным условием устойчивости относительно поперечной оси той же плоскости.

ЛЕКЦИЯ № 4. Кинематика жидкости

Гидростатика изучает жидкость в ее равновесном состоянии.

Кинематика жидкости изучает жидкость в движении, не рассматривая сил, порождавших или сопровождавших это движение.

Гидродинамика также изучает движение жидкости, но в зависимости от воздействия приложенных к жидкости сил.

В кинематике используется **сплошная модель жидкости**: некоторый ее континуум. Согласно гипотезе сплошности, рассматриваемый континуум — это жидкая частица, в которой непрерывно движется огромное количество молекул; в ней нет ни разрывов, ни пустот. Любая характеристика этого континуума представляет собой непрерывную функцию: такими же являются их частные производные.

Если в предыдущих трех лекциях, изучая гидростатику, за модель для изучения жидкости в равновесии взяли сплошную среду, то здесь на примере той же модели будут изучать жидкость в движении, изучая движение ее частиц.

Как правило, говоря о движении жидкости, имеют в виду движение некоторой ее частицы, а в ней изменение координат некоторой (любой) точки.

1. Методы определения движения жидкости

Для описания движения частицы, а через нее и жидкости, существуют два способа.

1. **Метод Лагранжа.** Этот метод не используется при описании волновых функций. Суть метода в следующем: требуется описать движение каждой частицы.

Начальному моменту времени t_0 соответствуют начальные координаты x_0, y_0, z_0 .

Однако к моменту t они уже другие. Как видно, речь идет о движении каждой частицы. Это движение можно считать определенным, если возможно указать для каждой частицы координаты x , y , z в произвольной момент времени t как непрерывные функции от x_0 , y_0 , z_0 .

$$\begin{aligned}x &= x(x_0, y_0, z_0, t), \\y &= y(x_0, y_0, z_0, t), \\z &= z(x_0, y_0, z_0, t).\end{aligned}\tag{100}$$

Системой (100) движение частицы описывается полностью.

Переменные x_0 , y_0 , z_0 , t , называют **переменными Лагранжа**.

Что касается проекции скоростей на координатные оси, т. е. частных производных вектора скоростей жидкой частицы \vec{u} , то

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{vx}{vt}, \\u_y &= \frac{vy}{vt}, \\u_z &= \frac{vz}{vt}.\end{aligned}\tag{101}$$

проекциями ускорений частиц будут:

$$\begin{aligned}a_x &= \frac{v^2 x}{vt^2}, \\a_y &= \frac{v^2 y}{vt^2}, \\a_z &= \frac{v^2 z}{vt^2}.\end{aligned}\tag{102}$$

2. Метод определения движения частиц по Эйлеру. Изучение движения жидкости в этом случае проводится в некоторой непо-

движной области потока жидкости, в котором находятся частицы. В частицах произвольно выбираются точки. Момент времени t как параметр является заданным в каждом времени рассматриваемой области, которая имеет координаты x, y, z .

Рассматриваемая область, как уже известно, находится в пределах потока и неподвижна. Скорость частицы жидкости \vec{u} в этой области в каждый момент времени t называется **мгновенной местной скоростью**.

Поле скорости называется совокупность всех мгновенных скоростей. Изменение этого поля описывается следующей системой:

$$\begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z, t), \\ u_y &= u_y(x, y, z, t), \\ u_z &= u_z(x, y, z, t). \end{aligned} \tag{103}$$

Переменные в (103) x, y, z, t называют **переменными Эйлера**.

Основные понятия, используемые в кинематике жидкости

Сутью вышеупомянутого поля скоростей являются векторные линии, которые часто называют линиями тока.

Линия тока — такая кривая линия, для любой точки которой в выбранный момент времени вектор местной скорости направлен по касательной (о нормальной составляющей скорости речь не идет, поскольку она равна нулю). Можно ли получить уравнение линий тока?

Попробуем: из определения линий тока следует, что направления касательной линии тока и вектора местной скорости должны совпадать, причем для любой точки. Это значит, что равны и направляющие косинусы углов с осями координат; из условия совпадения направлений вытекает равенство углов, следовательно, и косинусов этих углов:

Косинусы углов для касательной к линии $dx/dl, dy/dl, dz/dl$, где dx, dy, dz — проекции линий тока dl на соответствующие оси координат.

Для вектора скорости \vec{u} такими косинусами углов будут: u_x/u , u_y/u , u_z/u .

Исходя из определений линий тока получим:

$$\frac{dx}{dl} = \frac{u_x}{u}; \frac{dy}{dl} = \frac{u_y}{u}; \frac{dz}{dl} = \frac{u_z}{u}. \quad (104)$$

Преобразуем (104):

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dl}{u}; \frac{dy}{u_y} = \frac{dl}{u}; \frac{dz}{u_z} = \frac{dl}{u}. \quad (105)$$

С учетом (103), из (105) следует:

$$\frac{dx}{u_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{u_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{u_z(x, y, z, t)}. \quad (106)$$

Формула (106) является **дифференциальным уравнением линии тока** в момент времени t . Следовательно, задав различные t_i по полученным \vec{u}_i , где $i = 1, 2, 3, \dots$, можно построить линию тока: ею будет огибающая ломаной линии, состоящей из \vec{u}_i .

Линии тока, как правило, не пересекаются в силу условия $\vec{u} \neq 0$ или $\vec{u} \neq \infty$. Но все же, если эти условия нарушаются, то линии тока пересекаются: точку пересечения называют **особой** (или **критической**). И здесь, и в гидродинамике будем рассматривать два вида движений, в зависимости от характера изменения поля скоростей (векторов) по времени.

1. **Неустановившееся движение**, которое так называется из-за того, что местные скорости в рассматриваемых точках выбранной области по времени изменяются. Поэтому в общем случае линии тока и траектории частиц могут не совпадать: совпадение наблюдается, когда рассматривается состояние движения (поля скоростей). Такое движение полностью описывается системой уравнений (103).

Но если, как частный случай, направления скоростей не изменены, а изменяются только значения \vec{u} для соответствующих точек, то линии тока и траектории частиц совпадут.

2. **Установившееся движение:** поскольку при таком движении местные скорости не зависят от времени и постоянны, то уравнение (103) имеет вид:

$$\begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z), \\ u_y &= u_y(x, y, z), \\ u_z &= u_z(x, y, z). \end{aligned} \quad (107)$$

При таком движении линии тока и траектории частиц совпадают, а дифференциальное уравнение для линии тока имеет вид:

$$\frac{dx}{u_x(x, y, z)} = \frac{dy}{u_y(x, y, z)} = \frac{dz}{u_z(x, y, z)}. \quad (108)$$

Совокупность всех линий тока, которые проходят через каждую точку контура потока, образует поверхность, которую называют **трубкой тока**. Внутри этой трубки движется заключенная в ней жидкость, которую называют **стружкой**.

Стружка считается **элементарной**, если рассматриваемый контур бесконечно мал, и **конечной**, если контур имеет конечную площадку.

Сечение стружки, которое нормально в каждой своей точке к линиям тока, называется **живым сечением стружки**. В зависимости от конечности или бесконечной малости, площадь стружки принято обозначать, соответственно, ω и $d\omega$.

При неустановившемся движении можно говорить только о стружке в данный момент времени, в следующий момент времени параметры потока уже другие.

Для стружки с $d\omega$ местные скорости в пределах $d\omega$ постоянны; для стружек с ω такое постоянство не наблюдается.

Некоторый объем жидкости, который проходит через живое сечение в единицу времени, называют **расходом стружки** Q .

Если в элементарной струйке скорости распределены по живому сечению, то:

$$dQ = u d\omega. \quad (109)$$

Если струйка является конечной, то говорят о ее средней скорости v по живому сечению.

$$v = \frac{Q}{\omega}, \quad (110)$$

откуда:

$$Q = v\omega. \quad (111)$$

Потоком жидкости называют совокупность струек.

2. Вихревое и потенциальное (ламинарное) движение жидкой частицы

Можно выделить следующие виды движения.

Неустановившееся, по поведению скорости, давления, температуры и т. д.; **установившееся**, по тем же параметрам; **неравномерное**, в зависимости от поведения тех же параметров в живом сечении с площадью; **равномерное**, по тем же признакам; **напорное**, когда движение происходит под давлением $p > p_{атм}$ (например, в трубопроводах); **безнапорное**, когда движение жидкости происходит только под действием силы тяжести.

Ясно, что если исходить из других параметров, то можно называть и другие виды движения жидкости.

Однако основными видами движения, несмотря на большое количество их разновидностей, являются **вихревое** и **ламинарное** движения.

Вихревое движение. Проведем такой опыт, чтобы воочию увидеть различие двух основных видов движения жидкости.

Для опыта требуется: напорный бак, стеклянная трубка с краном для регулировки воды, а также мерный бак, в который протекает вода по стеклянной трубке.

Пусть в наполненный водой бак втекает краска из небольшого резервуара, который установлен над баком, и подкрашенная вода течет по стеклянной трубке.

Что мы будем наблюдать?

Это зависит от скорости жидкости, которая течет по стеклянной трубке. Если скорость небольшая, то краска или подкрашенная вода текут в трубке. Никакие обменные процессы между частями струйки и подкрашенной жидкости не видны.

Теперь увеличим скорость движения струйки: по мере увеличения скорости v , «трубка в трубке», то есть слой подкрашенной жидкости, сперва начинает вибрировать, затем, по мере увеличения скорости, слой разрывается на кольцевые части (запомним этот момент в следующих лекциях, где будем рассматривать движение жидкости, этот опыт очень пригодится), затем вообще перемешивается со всей жидкостью. Ее движение стало как бы беспорядочным, бурлящим.

Разные слои до определенной скорости текли параллельно друг другу.

При увеличении скорости «трубка в трубке» разрывалась на отдельные кольцевые части, двигаясь турбулентно, и наконец, перемешивается со всей остальной жидкостью. Эффект «трубка в трубке» исчез.

Движение, при котором частицы жидкости вращаются вокруг мгновенных осей, проходящих через их полюсы, называют **вихревым движением**.

Это движение жидкой частицы характеризуется **угловой скоростью**, компонентами (составляющими), которой являются:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{vu_z}{vy} - \frac{vu_y}{vz} \right); \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{vu_x}{vz} - \frac{vu_z}{vx} \right); \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{vu_y}{vx} - \frac{vu_x}{vy} \right).\end{aligned}\tag{112}$$

Вектор самой угловой скорости всегда перпендикулярен плоскости, в которой происходит вращение.

Если определить модуль угловой скорости, то $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$.

Удвоив проекции $\vec{\omega}$ на соответствующие координаты оси ω_x , ω_y , ω_z , получим компоненты **вектора вихря**

$$\theta = 2\omega. \quad (113)$$

Его проекция будет:

$$\begin{aligned} \theta &= 2\omega_x; \\ \theta &= 2\omega_y; \\ \theta &= 2\omega_z. \end{aligned} \quad (114)$$

Совокупность векторов вихря называется **векторным полем**.

По аналогии с полем скоростей и линией тока, существует и **вихревая линия**, которая характеризует векторное поле.

Это такая линия, у которой для каждой точки вектор угловой скорости сонаправлен с касательной к этой линии.

Линия описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{vx}{\omega_x(x, y, z, t)} = \frac{vy}{\omega_y(x, y, z, t)} = \frac{vz}{\omega_z(x, y, z, t)}, \quad (115)$$

в котором время t рассматривается как параметр.

Вихревые линии во многом ведут себя так же, как и линии тока.

В дальнейшем мы в основном будем изучать вихревые формы движения жидкости.

Вихревое движение называют также **турбулентным**.

Ламинарное движение

Это движение, как было сказано выше, называют также **потенциальным** (безвихревым) движением.

При таком движении отсутствует вращение частиц вокруг мгновенных осей, которые проходят через полюсы жидких частиц. По этой причине:

$$v_x = 0; v_y = 0; v_z = 0. \quad (116)$$

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0.$$

Выше отмечалось, что при движении жидкости происходит не только изменение положения частиц в пространстве, но и их деформация по линейным параметрам. Если рассмотренное выше вихревое движение является следствием изменения пространственного положения жидкой частицы, то **ламинарное (потенциальное, или безвихревое) движение** является следствием деформационных явлений линейных параметров, например, формы и объема.

Вихревое движение определялось направлением вихревого вектора

$$\vec{\theta} = 2\vec{v},$$

где v — угловая скорость, которая является характеристикой угловых деформаций.

Вообще говоря, любое движение жидкости является суммой вихревого и ламинарного движений и является деформационным движением.

Жидкости, которые поступательно движутся, характеризуются скоростью \vec{I} , проекции которой на координатные оси X, Y, Z есть I_x, I_y, I_z . Деформацию этого движения характеризуют деформацией этих компонентов

$$\frac{vI_x}{v_x}, \frac{vI_y}{v_y}, \frac{vI_z}{v_z}. \quad (117)$$

Формула (112) связывает между собой компоненты угловой \vec{v} и линейной \vec{I} скоростей. Но, поскольку при ламинарном движении $v_x = v_y = v_z = 0$, то согласно (112):

$$\begin{aligned}\frac{dh_x}{dy} &= \frac{vu_y}{vx}, \\ \frac{vI_x}{vz} &= \frac{vu_z}{vx}, \\ \frac{vI_y}{vz} &= \frac{vu_z}{vy}.\end{aligned}\tag{118}$$

Из этой формулы видно: поскольку существуют частные производные, связанные между собой в формуле (118), то эти частные производные принадлежат некоторой функции.

Действительно, такая функция существует и называется **потенциалом скорости** φ . С учетом этого, компоненты φ выглядят следующим образом:

$$I_y = -\frac{v\varphi}{vx}; \quad I_x = -\frac{v\varphi}{vy}; \quad I_z = -\frac{v\varphi}{vz}.\tag{119}$$

В знак доказательства того, что φ является искомой функцией, возьмем частные производные от (119):

$$\begin{aligned}\frac{vI_x}{vz} &= -\frac{v^2\varphi}{vxz} = \frac{vu_z}{vx}, \\ \frac{vI_y}{vx} &= -\frac{v^2\varphi}{vyx} = \frac{vu_x}{vy}, \\ \frac{vI_z}{vy} &= -\frac{v^2\varphi}{vyz} = \frac{vu_y}{vz}.\end{aligned}\tag{120}$$

Идентичность формул (118) и (119) очевидна: разница только в знаке «-», который является доказательством направления движения от большего потенциала к меньшему.

Следовательно, функция:

$$\varphi = \varphi(x, y, z)\tag{121}$$

существует.

Формулой (120) описывается установившееся ламинарное движение, поскольку мы не видим в ней параметра t . Соответственно, формулой (121) — неустановившееся.

Ускорение при ламинарном движении

Ускорение движения жидкой частицы имеет вид

$$\frac{du}{dt} = \frac{vu}{vt} + \frac{vi}{vx} \times \frac{du}{dt} + \frac{vi}{vy} \times \frac{du}{dt} + \frac{vi}{vz} \times \frac{du}{dz}, \quad (122)$$

где du/dt — полные производные по времени.

Ускорение можно представить в таком виде, исходя из $\frac{dx}{dt} = ix$; $\frac{dy}{dt} = iy$; $\frac{dz}{dt} = iz$. Составляющие искомого ускорения

$$\begin{cases} \frac{du_x}{dt} = \frac{vu_x}{vt} \left\} + \frac{vu_x}{vx} i_x + \frac{vu_x}{vy} iy + \frac{vu_x u_z}{vz}, \\ \frac{du_y}{dt} = \frac{vu_y}{vt} \left\} + \frac{vu_y}{vx} i_x + \frac{vu_y}{vy} iy + \frac{vu_y u_z}{vz}, \\ \frac{du_z}{dt} = \frac{vu_z}{vt} \left\} + \frac{vu_z}{vx} i_x + \frac{vu_z}{vy} iy + \frac{vu_z u_z}{vz}. \end{cases} \quad (123)$$

Формула (123) содержит в себе информацию о полном ускорении. Каждая составляющая этого ускорения на самом деле состоит из локального ускорения, типа vu_x/vt , и остальной части, например, первые строки: точно так же вторая и третья строки (123) состоят, соответственно, из du_y/vt , du_z/vt и остальной части соответствующих строк.

Слагаемые vu_x/vt , vu_y/vt , vu_z/vt , называют **местными ускорителями** в рассматриваемой точке, которыми характеризуются законы изменения поля скоростей.

Если движение установившееся, то

$$\frac{vu_x}{vt} = \frac{vu_y}{vt} = \frac{vu_z}{vt} = 0.$$

Само поле скоростей может быть названо **конвекцией**. Поэтому остальные части сумм, соответствующие каждой строке (123), называют **конвективными ускорениями**. Точнее, проекциями **конвективного ускорения**, которое характеризует неоднородность поля скоростей (или конвекций) в конкретный момент времени t .

Само полное ускорение можно назвать некоторой субстанцией, которая является суммой проекций $du_x/dt, du_y/dt, du_z/dt$,

3. Уравнение неразрывности жидкости

Довольно часто при решении задач приходится определять неизвестные функции типа:

- 1) $p = p(x, y, z, t)$ — давление;
- 2) $n_x(x, y, z, t), n_y(x, y, z, t), n_z(x, y, z, t)$ — проекции скорости на оси координат x, y, z ;
- 3) $\rho(x, y, z, t)$ — плотность жидкости.

Эти неизвестные, всего их пять, определяют по системе уравнений Эйлера.

Количество уравнений Эйлера всего три, а неизвестных, как видим, пять. Не хватает еще двух уравнений для того, чтобы определить эти неизвестные. Уравнение неразрывности является одним из двух недостающих уравнений. В качестве пятого уравнения используют уравнение состояния сплошной среды.

Выделим из рассматриваемой жидкости некоторый малый объем в форме параллелепипеда и обозначим его противостоящие грани: 1 противостоит грани 2, 3 — к 4, 5, 6; стороны граней 1 и 2 перпендикулярны оси O_x .

Обозначим грани параллелепипеда dx, dy, dt . Тогда его объем $dv = dx dy dt$.

За время Δt через грань 1 в объем dv поступает жидкость массой

$$\rho U_x dy dz dt, \quad (124)$$

где ρ — плотность жидкости;

U_x — ее линейная скорость в направлении оси O_x .

Поскольку среда, как предположено выше, сплошная, то все функции, описывающие ее, непрерывны, следовательно, дифференцируемы. Чтобы вычислить массу, вытекающую через грань 2, требуется дифференцировать выражение (70) по рассматриваемой координате и по времени. Тогда вытекающая через грань 2 жидкость по массе равна:

$$\rho Ux dydzdt + \frac{\partial(\rho Ux)}{\partial x} dx dz dt. \quad (125)$$

Очевидно, что приращение массы в объеме dV есть разность масс, которые выражены по (124) и (125), то есть

$$\rho Ux dydzdt - \left[\rho Ux + \frac{\partial(\rho Ux)}{\partial x} dx \right] dydzdt.$$

Раскрываем скобку и сокращаем одинаковые, но противоположные по знаку члены:

$$-\frac{\partial(\rho Ux)}{\partial x} dx dy dt. \quad (126)$$

В выражениях (124)—(126) учтено, что $\partial x/\partial t = Ux$, $\partial y/\partial t = 0$, $\partial z/\partial t = 0$, поскольку движение происходит только в направлении O_x . Не вдаваясь в подробности, точно такие же выражения можем получить по направлениям O_y и O_z :

$$-\frac{\partial(\rho Uy)}{\partial y} dx dy dt, \quad (127)$$

$$-\frac{\partial(\rho Uz)}{\partial z} dx dy dt. \quad (128)$$

Определим полное приращение массы жидкости dm в объеме dV : оно равно сумме приращений со всех направлений, т. е.

$$dm = - \left[\frac{\partial(\rho U_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho U_z)}{\partial z} \right] dx dy dz. \quad (129)$$

Но если приращение массы происходит в неизменном объеме, то значит, что-то происходит с плотностью, иначе приращение не произошло бы. Действительно, плотность изменяется по закону

$$d\rho = \frac{\partial\rho}{\partial t} dt. \quad (130)$$

Раз изменилась плотность, изменяется и масса, став равной

$$d\rho = \frac{\partial\rho}{\partial t} dt dx dy dz, \quad (131)$$

где $dx dy dz = dV$. (131) следует из того, что $d\rho dV = dm$ — приращение массы. Но с другой стороны, это не приращение выражено формулой (129). Поэтому, приравнявая (129) и (130), сокращая подобные члены, получим:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho U_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho U_z)}{\partial z} = 0. \quad (132)$$

Раскрыв слагаемые, кроме первого, получим

$$\frac{\partial(\rho U_x)}{\partial x} = \frac{\partial(\rho U_x)}{\partial x} + \frac{\rho \partial U_x}{\partial x}. \quad (133)$$

Аналогично получают слагаемые для выражений $\partial(\rho U_y)/\partial y$ и $\partial(\rho U_z)/\partial z$. С учетом (133) и (132), а так же того, что $U_x = dx/dt$, $U_y = dy/dt$, $U_z = dz/dt$, получим

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x} U_x + \frac{\partial\rho}{\partial y} U_y + \frac{\partial\rho}{\partial z} U_z. \quad (134)$$

Поскольку, несмотря на (76), плотность в данном случае не изменится, то, выводя ρ за скобку, получим окончательную формулу:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (135)$$

Мы получили уравнение неразрывности, то есть искомое уравнение для общего случая. В случае несжимаемости жидкости $\partial \rho / \partial t = 0$, поскольку $\rho = \text{const}$, поэтому из (135) следует:

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0, \quad (136)$$

поскольку эти слагаемые, как известно из курса высшей математики, являются скоростью изменения длины единичного вектора по одному из направлений X, Y, Z .

Что касается всей суммы в (136), то она выражает скорость относительного изменения объема dV . Это объемное изменение называют по-разному: объемным расширением, дивергенцией, расхождением вектора скоростей.

Мы остановим свой выбор на дивергенции, которая является скалярной величиной.

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = \overrightarrow{dUU}, \quad (137)$$

Для общего случая уравнение неразрывности:

$$\frac{1}{\rho} \times \frac{d\rho}{dt} \overrightarrow{dUU}. \quad (138)$$

Когда жидкость несжимаемая, то есть $\rho = \text{const}$:

$$\overrightarrow{dUU} = 0. \quad (139)$$

Возвращаясь к формуле (132) и предположив, что давление установившееся, то есть $dp/dt = 0$, получим:

$$\frac{\partial \rho U_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho U_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho U_z}{\partial z} = 0. \quad (140)$$

Для неустановившегося давления уравнением неразрывности можно считать уравнение (132). Для струйки уравнение будет иметь вид:

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial l} + \frac{v(\rho \omega)}{\partial t} = 0, \quad (141)$$

где Q — количество жидкости (расход);

ω — угловая скорость струйки;

dl — длина элементарного участка рассматриваемой струйки.

Если давление установившееся или площадь живого сечения $\omega = \text{const}$, то $d\omega/dt = 0$, т. е. согласно (141), $\rho \partial Q/\partial l = 0$, следовательно,

$$\frac{\partial Q}{\partial l} = 0. \quad (142)$$

4. Характеристики потока жидкости

В гидравлике **потоком** считают такое движение массы, когда эта масса ограничена:

- 1) твердыми поверхностями;
- 2) поверхностями, которые разделяют разные жидкости;
- 3) свободными поверхностями.

В зависимости от того, какого рода поверхностями или их сочетаниями ограничена движущаяся жидкость, различают следующие **виды потоков**:

- 1) безнапорные, когда поток ограничен сочетанием твердой и свободной поверхностей, например, река, канал, труба с неполным сечением;
- 2) напорные, например, труба с полным сечением;
- 3) гидравлические струи, которые ограничены жидкой (как мы увидим позже, такие струйки называют затопленными) или газовой средой.

Живое сечение и гидравлический радиус потока. Уравнение неразрывности в гидравлической форме

Сечение потока, с которого все линии тока нормальны (т. е. перпендикулярны), называется **живым сечением**.

Также выше мы увидели, что область потока можно рассматривать в виде объема dV , точнее

$$dV = d\omega dl, \quad (143)$$

где $d\omega$ — элементарные площади, на которые разбито живое сечение;
 dl — длина элементарного участка.

Теперь живое сечение можно представить в виде:

$$\omega = \int_{\omega} d\omega. \quad (144)$$

Если рассмотреть периметр живого сечения, то этот периметр называют смоченным периметром, обозначают его длину как X . При напорных потоках X равно длине периметра живого сечения, при безнапорных потоках X составляет только часть периметра живого сечения.

Чрезвычайно важное значение имеет в гидравлике понятие о гидравлическом радиусе

$$R = \frac{\omega}{\chi}. \quad (145)$$

Для напорного потока с круглым живым сечением, диаметром d и радиусом r_0 , гидравлический радиус выражается

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\pi d^2}{4\pi d} = \frac{d}{4}. \quad (146)$$

При выводе (146) учли

$$\omega = \pi \left(\frac{r_0}{2} \right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}; \quad \chi = \pi d. \quad (147)$$

Поскольку длина круга — периметр живого сечения — равна смоченному периметру, формулы (146) и (147) будут существенно облегчать наши гидравлические расчеты, когда мы завершим изучение теоретических основ гидравлики и начнем их прикладное применение в стандартных, наиболее часто встречающихся задачах, и не только в них.

Расход жидкости в потоке. Средняя скорость

Расход жидкости часто называют расходом потока. **Расход потока** — это такое количество жидкости, которое проходит через живое сечение за единицу времени.

Если рассматривать поток, состоящий из элементарных струек, то расход потока

$$Q = \int_{\omega} dQ = \int_{\omega} U d\omega, \quad (148)$$

где $dQ = d\omega$ — расход элементарного потока;

U — скорость жидкости в данном сечении.

Еще одной характеристикой потока является средняя скорость потока в поперечном живом сечении с площадью ω

$$v = \frac{Q}{\omega}. \quad (149)$$

Местная скорость U не то же, что средняя скорость v : если местная скорость характеризует скорость потока (речь идет о вязкой жидкости) в отдельных точках живого сечения, то средняя скорость характеризует все живое сечение.

В отдельных точках может случиться, что $v = U$.

Местная скорость U имеет теоретическое значение.

Средняя скорость v используется для решения практических задач.

В действительности нет такого потока с v . Имеется в виду, что берется воображаемый поток со средней скоростью v для облегчения решения практических задач, например, для расчета

$$Q = v\omega. \quad (150)$$

Разновидность движения

При установившемся движении, когда местные скорости потока со временем не изменяются, нужно охарактеризовать поток по характеру поля скоростей по той причине, что из-за постоянства местных скоростей остается исходить из поведения мгновенных местных скоростей. Совокупность этих скоростей в самом начале этой лекции мы называли векторным полем, или полем скоростей.

В зависимости от характера изменения поля скоростей различают следующие виды установившегося движения:

- 1) **равномерное**, когда основные характеристики потока — форма и площадь живого сечения, средняя скорость потока, в том числе по длине, глубине потока (если движение безнапорное), — постоянны, не изменяются; кроме того, по всей длине потока вдоль линии тока местные скорости одинаковы, а ускорений вовсе нет;
- 2) **неравномерное**, когда ни один из перечисленных для равномерного движения факторов не выполняется, в том числе и условие параллельности линий токов.

Существует плавно изменяющееся движение, которое все же считают неравномерным движением; при таком движении предполагают, что линии тока примерно параллельны, и все остальные изменения происходят плавно. Поэтому, когда направление движения и ось Ox сонаправлены, то пренебрегают некоторыми величинами

$$U_x \approx U; U_y = U_z = 0. \quad (151)$$

Уравнение неразрывности (82) для плавно изменяющегося движения имеет вид (с учетом (97)):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (152)$$

аналогично для остальных направлений.

Уравнение (152) свидетельствует о том, что вдоль линии тока (или потока) скорость $U = \text{const}$. Поэтому такого рода движение называют равномерным прямолинейным;

3) если движение нестационарное или неустановившееся, когда местные скорости с течением времени изменяются, то в таком движении различают следующие разновидности: **быстро изменяющееся движение**, **медленно изменяющееся движение**, или, как часто его называют, **квазистационарное**.

В гидравлике часто приходится решать задачи графически. При этом пользуются так называемой **эпюрой** скоростей, которую считают объемной фигурой. Проекция эпюры скоростей на выбранную вертикаль является плоской фигурой.

Давление разделяют также, в зависимости от количества координат в описывающих его уравнениях, на: **пространственное**, когда движение трехмерное; **плоское**, когда движение двухмерное, т. е. U_x , U_y или U_z равна нулю; **одномерное**, когда движение зависит только от одной из координат.

В заключение отметим следующее уравнение неразрывности для струйки (87), при условии, что жидкость несжимаемая, т. е. $\rho = \text{const}$, для потока это уравнение имеет вид:

$$Q = v_1\omega_1 = v_2\omega_2 = \dots = v_i\omega_i = \text{idem}, \quad (153)$$

где $v_i\omega_i$ — скорость и площадь одного и того же сечения с номером i .

Уравнение (153) называют **уравнением неразрывности в гидравлической форме**.

ЛЕКЦИЯ № 5. Динамика невязкой жидкости

Динамика, изучая невязкую жидкость и определяя закономерности движения этой жидкости, переносит их на вязкую жидкость. В этом заключается ее ценность.

Дело в том, что ни в природе, ни в технике не существует никакой невязкой жидкости — всего лишь модель некоторой жидкости служит для получения определенных результатов.

В динамике, как правило, внешние силы задаются.

Задача состоит в определении:

- 1) сил и кинематических характеристик движения жидкости в каждой точке;
- 2) гидродинамических сил воздействия потока жидкости на погруженное тело.

По определению в невязкой жидкости не существует сил трения. Поэтому движущуюся невязкую жидкость можно рассматривать (практически) как гидростатическую среду из-за того, что воздействие сил на зависит от их направления, то есть значение напряжения в невязкой среде можно рассматривать как нормаль в каждой точке.

Таким образом, динамику невязкой жидкости следует рассматривать как промежуточный, переходный раздел для переноса полученных на первых четырех лекциях знаний на реальные задачи техники и природы, которые будем изучать в главе «Динамика вязкой жидкости» и до конца настоящего курса.

1. Дифференциальные уравнения движения невязкой жидкости (уравнение Эйлера)

Уравнение Эйлера служит одним из фундаментальных в гидравлике, наряду с уравнением Бернулли и некоторыми другими.

Изучение гидравлики как таковой практически начинается с уравнения Эйлера, которое служит исходным пунктом для выхода на другие выражения.

Попробуем вывести это уравнение. Пусть имеем бесконечно малый параллелепипед с гранями $dx dy dz$ в невязкой жидкости с плотностью ρ . Он заполнен жидкостью и движется как составная часть потока. Какие силы действуют на выделенный объект? Это силы массы и силы поверхностных давлений, которые действуют на $dV = dx dy dz$ со стороны жидкости, в которой находится выделенный dV . Как силы массы пропорциональны массе, так и поверхностные силы пропорциональны площадям, на которые оказывается давление. Эти силы направлены к граням вовнутрь по нормали. Определим математическое выражение этих сил.

Назовем, как и при получении уравнения неразрывности, грани параллелепипеда:

- 1,2 — перпендикулярные к оси O_x и параллельные оси O_y ,
- 3,4 — перпендикулярные к оси O_y и параллельные оси O_x ,
- 5,6 — перпендикулярные к оси O_z и параллельные оси O_x .

Теперь нужно определить, какая сила приложена к центру масс параллелепипеда. Для этого рассматриваем произвольную точку из $(x + dx, y, z)$: в этой точке давление есть величина, равная 130

$$\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (154)$$

У массовых сил две составляющие:

$$1) \rho dx dy dz \frac{dU_x}{dt},$$

где $\rho dx dy dz$ (101) — масса жидкости с плотностью в данном объеме dV , dU_x/dt — ускорение центра масс (его проекция на ось X);

2) $F_x \rho dx dy dz$ (102) — проекция на ось X массовой силы, которая действует на $dV dx dy dz$, F_x — соответствующая составляющая плотности распределения массовой силы.

Исходим из того, что имеем сплошную среду, следовательно, давление в ней является непрерывной функцией относительно этой среды:

$$\rho = \rho(x, y, z, t) \text{ или } \rho = f(x, y, z, t).$$

Теперь рассмотрим из грани 2 любые две точки, таким образом разность давлений между ними будет

$$\rho + \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \right) = - \frac{\partial \rho}{\partial x} dx. \quad (155)$$

Здесь мы предположили, что в первой точке давление $-\rho$; во второй, отстоящей от первой на расстоянии dx $-(\rho + \partial \rho / \partial x dx)$.

Поскольку в рассматриваемых точках координаты y, z одинаковы, то x -вая проекция суммарного давления из (147) может быть представлена в виде

$$- \frac{\partial \rho}{\partial x} dx dy dz. \quad (156)$$

Сила, приложенная к центру массы параллелепипеда, которая и заставляет эту жидкость совершать движение, есть сумма найденных сил по (154) и (153), то есть

$$F_x \rho dx dy dz - \frac{\partial \rho}{\partial x} dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{dU_x}{dt}. \quad (157)$$

Получили уравнение движения параллелепипеда с dV_1 по направлению оси X .

Делим (157) на массу $\rho dx dy dz$:

$$\begin{cases} F_x - \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{dU_x}{dt} \\ F_y - \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{dU_y}{dt} \\ F_z - \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{dU_z}{dt} \end{cases}. \quad (158)$$

Полученная система уравнений (158) есть искомое уравнение движения невязкой жидкости — уравнение Эйлера.

К трем уравнениям (158) добавляются еще два уравнения, поскольку неизвестных пять, и решается система из пяти уравнений с пятью неизвестными: одним из двух дополнительных уравнений является уравнение неразрывности. Еще одним уравнением является уравнение состояния. Например, для несжимаемой жидкости уравнением состояния может быть условие $\rho = \text{const}$.

Уравнение состояния должно быть выбрано таким образом, чтобы оно содержало хотя бы одно из пяти неизвестных.

Уравнение Эйлера для разных состояний имеет разные формы записи. Поскольку само уравнение (формула (158)) получено для общего случая, то рассмотрим несколько случаев:

1) движение неустановившееся: в этом случае ускорение выделенного параллелепипеда с dV имеет вид (для x -вой компоненты)

$$\frac{dU_x}{dt} = \frac{\partial U_x}{\partial t} + \frac{\partial U_x}{\partial t} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U_x}{\partial y} \times \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U_x}{\partial z} \times \frac{dz}{dt}. \quad (159)$$

Поскольку

$$\frac{dx}{dt} = U_x; \quad \frac{dy}{dt} = U_y; \quad \frac{dz}{dt} = U_z. \quad (160)$$

то, с учетом приведенных выражений (160), (159) и полученного выражения в (158), имеем

$$\begin{cases} F_x - \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial U_x}{\partial t} + \frac{\partial U_x}{\partial x} U_x + \frac{\partial U_x}{\partial y} U_y + \frac{\partial U_x}{\partial z} U_z \\ F_y - \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial U_y}{\partial t} + \frac{\partial U_y}{\partial x} U_x + \frac{\partial U_y}{\partial y} U_y + \frac{\partial U_y}{\partial z} U_z; \\ F_z - \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial U_z}{\partial t} + \frac{\partial U_z}{\partial x} U_x + \frac{\partial U_z}{\partial y} U_y + \frac{\partial U_z}{\partial z} U_z \end{cases} \quad (161)$$

- 2) жидкость в покое. Следовательно, $U_x = U_y = U_z = 0$. В таком случае уравнение Эйлера превращается в уравнение равномерной жидкости. Это уравнение также дифференциальное и является системой из трех уравнений;
- 3) жидкость невязкая. Для такой жидкости уравнение движения имеет вид (исходя из (158)):

$$Fl - \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial \rho}{\partial l} = \frac{dU}{dt}, \quad (162)$$

где Fl — проекция плотности распределения сил массы на направление, по которому направлена касательная к линии тока;

dU/dt — ускорение частицы.

Уравнение (162) можно преобразовать и привести в вид:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dt} + \frac{dU}{dl} \times \frac{dl}{dt}. \quad (163)$$

Для этого следует расписать

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial l} \times \frac{dl}{dt}. \quad (164)$$

Подставив $U = dl/dt$ в (164) и учтя, что $(\partial U/\partial l)U = 1/2(\partial U^2/\partial l)$, получим уравнение (163).

Мы привели три формы уравнения Эйлера для трех частных случаев. Но это не предел. Главное — правильно определить уравнение состояния, которое содержало хотя бы один неизвестный параметр.

Уравнение Эйлера в сочетании с уравнением неразрывности может быть применено для любого случая.

Уравнение состояния в общем виде:

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0. \quad (165)$$

Таким образом, для решения многих гидродинамических задач оказывается достаточно уравнения Эйлера, уравнения неразрывности и уравнения состояния.

С помощью пяти уравнений легко находятся пять неизвестных: p, U_x, U_y, U_z, ρ .

Невязкую жидкость можно описать и другим уравнением.

2. Форма Громеки уравнения движения невязкой жидкости

Уравнения Громеки — попросту другая, несколько преобразованная форма записи уравнения Эйлера. Рассмотрим первое уравнение из системы уравнений (153).

$$F_x - \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial U_x}{dt} + \frac{\partial U_x}{\partial x} U_x + \frac{\partial U_x}{\partial y} U_y + \frac{\partial U_x}{\partial z} U_z. \quad (166)$$

Чтобы его преобразовать, будем пользоваться уравнениями компонент угловой скорости для вихревого движения.

Найдя из третьего уравнения той системы уравнений для:

$$\frac{\partial U_x}{\partial y} = \frac{\partial U_y}{\partial x} - 2^\omega,$$

из второго уравнения

$$\frac{\partial U_x}{\partial z} = \frac{\partial U_z}{\partial x} + 2^\omega,$$

и, подставив их в (166), получим (сгруппировав слагаемые):

$$\begin{aligned} F_x - \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} U_x + \frac{\partial U_x}{\partial y} U_y + \frac{\partial U_x}{\partial z} U_z \right) + 2(U_z^\omega_y - U_y^\omega_z) = \\ &= \frac{\partial U_x}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} \times \frac{U^2}{2} + 2(U_z^\omega_y - U_y^\omega_z). \end{aligned} \quad (167)$$

где $U^2 = U_x^2 + U_y^2 + U_z^2$.

Преобразовав точно так же y -вую и z -вую компоненту, окончательно приходим к форме Громеко уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} F_x - \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial U_x}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} \times \frac{U^2}{2} + 2(U_z^{\omega_y} - U_y^{\omega_z}) \\ F_y - \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial U_y}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} \times \frac{U^2}{2} + 2(U_x^{\omega_z} - U_z^{\omega_x}) \\ F_z - \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\partial U_z}{dt} + \frac{\partial}{\partial z} \times \frac{U^2}{2} + 2(U_y^{\omega_x} - U_x^{\omega_y}) \end{cases} \quad (168)$$

Уравнение Эйлера было получено российским ученым *Л. Эйлером* в 1755 г., и преобразовано в вид (168) опять же российским ученым *И. С. Громекой* в 1881 г.

Но Громеко на этом не остановился. Существует и другая форма записи (168), правда в частном случае, если жидкость находится под воздействием потенциальных сил (имеются в виду силы массовые).

Уравнение Громеко в этом случае имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{U^2}{2} \right) = \frac{\partial U_x}{dt} + 2(U_z^{\omega_y} - U_y^{\omega_z}) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{U^2}{2} \right) = \frac{\partial U_y}{dt} + 2(U_x^{\omega_z} - U_z^{\omega_x}) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{U^2}{2} \right) = \frac{\partial U_z}{dt} + 2(U_y^{\omega_x} - U_x^{\omega_y}) \end{cases} \quad (169)$$

Сравнивая (168) и (169), видим, что у них нет принципиального различия, кроме тех, что, например, для x -вой компоненты слагаемое $(\partial/\partial x)(U/2)^2$ перенесено в левую часть, а также x -вая компонента силы F_x теперь выражена как $F_x = -\partial\Pi/\partial x$, где F_x является частной производной от той самой силы масс с потенциалом Π . Поскольку

$$-d\Pi = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad (170)$$

то для компонентов F_y , F_z можно вывести те же выражения, что и для F_x , и, подставив это в (168), прийти к (169).

Уравнение Громеко применяется по необходимости. Однако в современной гидравлике предпочитают применение наиболее фундаментального уравнения, для получения которого уравнение Громеко служит как бы промежуточным этапом (после уравнения Эйлера). В том и состоит ценность уравнения Громеко.

3. Уравнение Бернулли

Уравнение Громеки подходит для описания движения жидкости, если компоненты функции движения содержат какую-то вихревую величину. Например, в (157) эта вихревая величина содержится в компонентах $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ угловой скорости ω .

Установившееся движение невязкой несжимаемой жидкости, находящейся под воздействием потенциальных массовых сил

Условием того, что движение является установившимся, является отсутствие ускорения, то есть условие равенства нулю частных производных от всех компонентов скорости:

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} = \frac{\partial U_y}{\partial t} = \frac{\partial U_z}{\partial t} = 0. \quad (171)$$

Если теперь сложить $\frac{\partial U_x}{\partial t} + \frac{\partial U_y}{\partial t} + \frac{\partial U_z}{\partial t}$, то получим $\frac{\partial U_x}{\partial t} = 0$, что и есть равенство ускорения. Условием невязкой несжимаемой жидкости является:

- 1) отсутствие трения (внутри жидкости);
- 2) постоянство (однородности) плотности $\rho = \text{const}$.

С учетом (171), из (169) следует:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{U^2}{2} \right) = 2(Uz^{\omega_y} - Uy^{\omega_z}) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{U^2}{2} \right) = 2(Ux^{\omega_z} - Uz^{\omega_x}) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{U^2}{2} \right) = 2(Uy^{\omega_x} - Ux^{\omega_y}) \end{cases} \quad (172)$$

Если проецировать перемещение на бесконечно малую величину dl на координатные оси, то получим:

$$dx = U_x dt; \quad dy = U_y dt; \quad dz = U_z dt. \quad (173)$$

Теперь помножим каждое уравнение (121) соответственно на dx , dy , dz , и сложим их:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\Pi - \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} \right) dx = 2(U_z^\omega{}_y - U_y^\omega{}_z) dx.$$

Получим еще два уравнения для компонент U_y , U_z . Форма записи аналогична. Сложив полученные уравнения и учтя, что

$$\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz$$

есть полный дифференциал от скобки на левой половине, а также умножив уравнение (сумму) на знак минус, получим:

$$d \left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} \right) = -2[(U_z^\omega{}_y - U_y^\omega{}_z) dx + (U_x^\omega{}_z - U_z^\omega{}_x) dy + (U_y^\omega{}_x - U_x^\omega{}_y) dz]. \quad (174)$$

Теперь правую часть (174) можно записать как определитель: это даст нам возможность анализировать поведение левой части (174):

$$d \left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} \right) = -2 \begin{pmatrix} dx dy dz \\ \partial x \partial y \partial z \\ U_x U_y U_z \end{pmatrix}. \quad (175)$$

Предположив, что правая часть равна нулю, а это возможно, если вторая или третья строки равны нулю, получим:

$$d\left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2}\right) = 0.$$

Это равносильно тому, что

$$d\left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2}\right) = \text{const.} \quad (176)$$

Нами получено уравнение Бернулли.

Анализ уравнения Бернулли

Анализ будем проводить, приравняв строки или столбцы определителя в (175) нулю или рассмотрев случаи их пропорциональности.

Пропорциональны строки 1 и 3, что значит

$$\frac{dx}{Ux} = \frac{dy}{Uy} = \frac{dz}{Uz}. \quad (177)$$

Полученное уравнение есть не что иное, как уравнение линии тока при установившемся движении.

Отсюда следуют выводы:

1) если движение установившееся, то первая и третья строки в уравнении Бернулли пропорциональны.

Таким образом, условие (169) справедливо на линиях тока;

2) пропорциональны строки 1 и 2, то есть

$$\frac{dx}{\omega x} = \frac{dy}{\omega y} = \frac{dz}{\omega z}. \quad (178)$$

Уравнение (178) является уравнением вихревой линии. Выводы из (178) аналогичны выводам из (177), только линии тока заменяют вихревые линии. Одним словом, в этом случае условие (178) выполняется для вихревых линий;

3) пропорциональны соответствующие члены строк 2 и 3, т. е.

$$\frac{\omega x}{U_x} = \frac{\omega y}{U_y} = \frac{\omega z}{U_z} = \text{const} = a, \quad (179)$$

где a — некоторая постоянная величина; если подставить (179) в (178), то получим уравнение линий тока (177), поскольку из (179) следует:

$$\omega_x = aU_x; \omega_y = aU_y; \omega_z = aU_z. \quad (180)$$

Здесь следует интересный вывод о том, что векторы линейной скорости \vec{U} и угловой скорости $\vec{\omega}$ сонаправлены, то есть параллельны.

В более широком понимании надо представить себе следующее: так как рассматриваемое движение установившееся, то получается, что частицы жидкости движутся по спирали и их траектории по спирали образуют линии тока. Следовательно, линии тока и траектории частиц — одно и то же. Движение такого рода называют **винтовым**.

В этом, третьем случае, для того, чтобы определитель был равен нулю, не требуется равенство нулю координат скорости, что и утверждается условием (170); по этой причине внутри траектории-спирали в любой ее точке удельная энергия одна и та же. Такой парадокс наблюдается при винтовом движении. По этой же причине при винтовом движении уравнение Бернулли применимо для любой точки спирали/линии тока;

4) вторая строка определителя (точнее, члены второй строки) равна нулю, т. е.

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0. \quad (181)$$

Но отсутствие угловой скорости равносильно отсутствию вихревости движения. Следовательно, движение безвихревое (ламинарное или потенциальное, что одно и то же). И в этом случае уравнение Бернулли применимо для любой точки, движущейся потенциально;

5) пусть строка 3 равна нулю, то есть

$$U_x = U_y = U_z = 0.$$

Но это, как нам уже известно, условие равновесия жидкости.

Таким образом, мы рассмотрели все возможные случаи пропорциональности строк, а также равенство строк нулю, кроме первой. Это происходит потому, что, если даже первая строка равна нулю, то это вовсе не значит, что определитель тоже равен нулю. Тем самым, анализ уравнения Бернулли завершен.

Примеры прикладного применения уравнения Бернулли

Теперь мы разберемся с вопросом: как применять уравнение Бернулли для решения практических задач?

Во всех случаях требуется определить математическую формулу потенциальной функции, которая входит в уравнение Бернулли: но эта функция имеет разные формулы в разных ситуациях. Ее вид зависит от того, какие массовые силы действуют на рассматриваемую жидкость. Поэтому рассмотрим две ситуации.

Одна массовая сила

В этом случае подразумевается сила тяжести, которая выступает в качестве единственной массовой силы. Очевидно, что в этом случае ось Z и плотность распределения F_z силы Π противоположны, следовательно,

$$F_x = F_y = 0; F_z = -g.$$

Поскольку $-d\Pi = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ (см. (161)), то $-d\Pi = F_z dz$, окончательно $d\Pi = -gdz$.

Интегрируем полученное выражение:

$$P = -gz + C, \quad (182)$$

где C — некоторая постоянная.

Подставив (182) в уравнение Бернулли (176), имеем выражение для случая воздействия на жидкость только одной массовой силы:

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} = \text{const.} \quad (183)$$

Если разделить уравнение (133) на g (поскольку оно постоянное), то

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} = \text{const.} \quad (184)$$

Мы получили одну из самых часто применяемых в решении гидравлических задач формул, поэтому следует ее запомнить особенно хорошо.

Если требуется определить расположение частицы в двух разных положениях, то выполняется соотношение для координат Z_1 и Z_2 , характеризующие эти положения

$$gZ_1 + \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} = gZ_2 + \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2}. \quad (185)$$

Можно переписать (135) в другой форме:

$$Z_1 + \frac{p}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} = Z_2 + \frac{p}{\rho g} + \frac{U^2}{2g}. \quad (186)$$

Несколько массовых сил

В этом случае усложним задачу. Пусть на частицы жидкости действуют следующие силы: сила тяжести; центробежная сила

инерции (переносит движение от центра); кориолисова сила инерции, которая заставляет частицы вращаться вокруг оси Z с одновременным поступательным движением.

В этом случае мы получили возможность представить себе винтовое движение. Вращение происходит с угловой скоростью ω . Нужно представить себе криволинейный участок некоторого потока жидкости, на этом участке поток как бы вращается вокруг некоторой оси с угловой скоростью.

Частным случаем такого потока можно считать гидравлическую струю. Вот и рассмотрим элементарную струйку жидкости и применим в отношении к ней уравнение Бернулли. Для этого поместим элементарную гидравлическую струю в координатную систему XYZ таким образом, чтобы плоскость YOX вращалась вокруг оси O_Z .

Будем считать, что \vec{U} — местная скорость жидкости во вращающейся плоскости YOX . Пусть

$$F_{x_1} = F_{y_1} = 0; \quad F_{z_1} = -g \quad (187)$$

составляющие силы тяжести (то есть ее проекции на оси координат), отнесенные к единичной массе жидкости. К этой же массе приложена вторая сила — сила инерции $\omega^2 r$, где r — расстояние от частицы до оси вращения ее компоненты.

$$F_{x_2} = \omega^2 x; \quad F_{y_2} = \omega^2 y; \quad F_{z_2} = 0, \quad (188)$$

из-за того, что ось O_Z «не вращается».

Теперь можно перейти от выражения плотности распределения сил к самой потенциальной силе P . Однако следует учитывать, что, поскольку вектор кориолисовой силы находится в плоскости YOX , но она перпендикулярна к оси O_Z , что и видно из (188), то в окончательном выражении проекции плотности рас-

пределения этой силы будут отсутствовать. Выражая теперь составляющие массовой силы как ее полный дифференциал в виде

$$-d\Pi = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (189)$$

и подставляя в (189) ненулевые значения F_x , F_y , F_z , имеем:

$$d\Pi = \omega^2 r dx + \omega^2 r dy - g dz. \quad (190)$$

Интегрируем (190), тогда

$$\Pi = -\frac{\omega^2(x^2 + y^2)}{2} + gz + C. \quad (191)$$

Из геометрии известно, что для окружности $x^2 + y^2 = r^2$. С учетом этого, окончательно потенциальная сила будет:

$$\Pi = gz - \frac{\omega^2 r^2}{2} + C. \quad (192)$$

Подставив (192) в (176), получим уравнение Бернулли. Для рассматриваемого случая:

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} - \frac{\omega^2 r^2}{2} = \text{const}. \quad (193)$$

Или, что одно и то же, после деления на g

$$z + \frac{p}{g\rho} + \frac{U^2}{2g} - \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \text{const}. \quad (193')$$

Если рассмотреть два сечения элементарной струйки, то, применив вышеуказанный механизм, легко убедиться, что

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{U_1^2}{2g} - \frac{\omega^2 r_1^2}{2g} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{U_2^2}{2g} - \omega^2 r_2^2, \quad (194)$$

где $z_1, h_1, U_1, V_1, z_2, h_2, U_2, V_2$ — параметры соответствующих сечений.

Энергетический смысл уравнения Бернулли

Завершим анализ уравнения Бернулли выяснением энергетических смыслов слагаемых, которые в нем имеются, а затем и самого уравнения в целом.

Пусть теперь имеем установившееся движение жидкости, которая невязкая, несжимаемая.

И пусть она находится под воздействием сил тяжести и давления, тогда уравнение Бернулли имеет вид:

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} = \text{const.}$$

Теперь требуется идентифицировать каждое из слагаемых. Потенциальная энергия положения Z — это высота элементарной струйки над горизонтальной плоскостью сравнения. Жидкость с массой M на высоте Z от плоскости сравнения имеет некоторую потенциальную энергию MgZ . Тогда

$$Z = \frac{MgZ}{Mg}.$$

Это та же потенциальная энергия, отнесенная к единичной массе. Поэтому Z называют удельной потенциальной энергией положения.

Удельная работа силы давления

Пусть имеем элементарную струйку с живым сечением $d\omega$, давлением p и скоростью u . При перемещении частицы жидкости в струйке на расстояние udt за время dt сила давления $p d\omega$ совершает работу dA , где

$$dA = p d\omega u dt. \quad (195)$$

Если соотнести эту работу с объемом вытесненной жидкости

$$dV = d\omega u dt,$$

то

$$\frac{dA}{dV} = \frac{p d\omega u dt}{\rho g d\omega u dt} = \frac{p}{\rho g}. \quad (196)$$

Получаем второе слагаемое в уравнении Бернулли. Следовательно, как мы только что убедились, $p/\rho g$ — это работа силы давления, которая отнесена к единице веса жидкости.

Удельная кинематическая энергия

Теперь выясним все то же самое для слагаемого $U^2/2g$. Движущаяся частица с массой M и скоростью u имеет вес MG и кинематическую энергию $U^2/2g$. Если соотнести кинематическую энергию с единичной массой, то

$$M \frac{U^2}{2} = \frac{U^2}{2}. \quad (197)$$

Полученное выражение есть не что иное, как последнее, третье слагаемое в уравнении Бернулли по формуле (184). Следовательно, $U^2/2$ — это удельная кинетическая энергия струйки. Таким образом, общий энергетический смысл уравнения Бернулли таков: уравнение Бернулли представляет собой сумму, содержащую в себе полную удельную энергию сечения жидкости в потоке:

- 1) если полная энергия соотнесена с единичной массой, то она есть сумма $gz + p/\rho + U^2/2$;
- 2) если полная энергия соотнесена с единичным объемом, то $\rho gz + p + \rho U^2/2$;
- 3) если полная энергия соотнесена единичному весу, то полная энергия есть сумма $z + p/\rho g + U^2/2g$. Не следует забывать, что удельная энергия определяется относительно плоскости сравнения: эта плоскость выбирается произвольно и горизонтально. Обычно выбирают такую плоскость, где $d\Pi = 0$. Теперь легко формулировать наиболее важный вывод, вытекающий из уравнения Бернулли. Для любой пары точек, произвольно выбранной из потока, в котором установившееся движение и который движется потенциально-вихрево, а жидкость невязко-несжимаемая, суммарная и удельная энергия одинаковы, то есть распределены по потоку равномерно.

Геометрический смысл уравнения Бернулли. Пьезометрические напор и уклон. Линия удельной энергии

Часто применение уравнения Бернулли удобно в его геометрической интерпретации, поскольку не всегда удается определить массовую силу Π (имеется в виду — ее математическую формулу). В таких случаях геометрический смысл уравнения Бернулли позволяет решать поставленную задачу, минуя некоторые расчеты.

Основу теоретической части такой интерпретации составляет гидравлическое понятие **напор**, которое принято обозначать буквой H , где

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{U^2}{2g}. \quad (188)$$

Гидродинамический напор H состоит из следующих разновидностей напоров, которые входят в формулу (188) как слагаемые:

- 1) пьезометрический напор, если в (188) $p = p_{\text{изг}}$, или гидростатический, если $p \neq p_{\text{изг}}$;
- 2) $U^2/2g$ — скоростной напор.

Как видно из формулы (198), все слагаемые имеют линейную размерность, поэтому по аналогии с первым слагаемым z их можно считать высотами. Назовем эти высоты:

- 1) z — геометрическая высота, или высота по положению;
- 2) $p/\rho g$ — высота, соответствующая давлению p ;
- 3) $U^2/2g$ — скоростная высота, соответствующая скорости.

Если взять любую из этих высот и определить геометрические места, отсчитанные от плоскости сравнения, то получим некоторую линию, состоящую из этих геометрических точек, причем полученные линии для разных высот (их три) могут совпадать, но могут и различаться, как часто бывает. Например, геометрическое место концов высоты H соответствует некоторой горизонтальной линии, которую принято называть **напорной линией** или **линией удельной энергии**.

Точно так же (по аналогии) геометрические места концов пьезометрического напора принято называть **пьезометрической линией**. Напорная и пьезометрическая линии расположены друг от друга на расстоянии (высоте) $p_{ат}/\rho g$, поскольку $p = p_{изг} + p_{ат}$, т. е.

$$\frac{p}{\rho g} = \frac{p_{изг}}{\rho g} + \frac{p_{атм}}{\rho g}.$$

Напор пьезометрический, если $p = p_{изг}$, следовательно, линия пьезометрическая, если точки, составляющие ее, являются концами высоты $(z + p_{изг}/\rho g)$. Завершая изложение динамически невязкой жидкости, назовем еще одну характеристику, которая будет использоваться нами при решении практических задач.

Во-первых, отметим, что горизонтальная плоскость, содержащая напорную линию и находящаяся над плоскостью сравнения, называется **напорной плоскостью**. Во-вторых, следует выяснить, чем или как характеризовать эту плоскость при разных движениях. Эту характеристику называют **пьезометрическим уклоном J_p** ,

который показывает, как изменяется на единице длины пьезометрический напор (или пьезометрическая линия):

$$J_{\Pi} = -\frac{d}{dl} \left(z + \frac{P}{\rho g} \right). \quad (199)$$

Пьезометрический уклон считается положительным, если он по течению струйки (или потока) уменьшается, отсюда и знак минус в формуле (199) перед дифференциалом. Чтобы J_{Π} остался положительным, должно выполняться условие

$$\frac{d}{dl} \left(z + \frac{P}{\rho g} \right) < 0, \quad (200)$$

следовательно, $J_{\Pi} > 0$, в противном случае

$$\frac{d}{dl} \left(z + \frac{P}{\rho g} \right) > 0, \quad (201)$$

следовательно $J_{\Pi} < 0$.

ЛЕКЦИЯ № 6. Динамика вязкой жидкости

Если жидкость невязкая, то в ней и векторы скорости, и напряжения любого другого рода в каждой точке жидкости направлены по нормали; значение этих векторов или напряжений не зависит от их направления, как и при равномерном состоянии жидкости; ни в природе, ни в технике нет такой невязкой жидкости, это всего лишь модель для установления некоторых законов гидродинамики; в вязкой жидкости нет сил трения.

В противовес невязкой, в вязкой жидкости присутствуют силы трения, следовательно, и касательные напряжения к траектории частицы жидкости из-за сил трения, и действия напряжения зависят от их направления действия, а не только от координат движения, как при вязкой жидкости.

1. Уравнения движения вязкой жидкости

Для получения уравнения движения вязкой жидкости рассмотрим такой же объем жидкости $dV = dxdydz$, который принадлежит вязкой жидкости (рис. 1).

Грани этого объема обозначим как 1, 2, 3, 4, 5, 6.

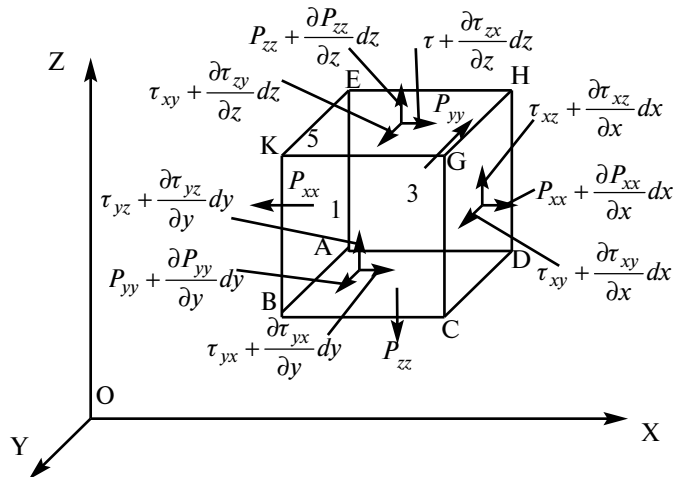


Рис. 1. Силы, действующие на элементарный объем вязкой жидкости в потоке

Чтобы легко представить себе положение параллелепипеда (объема dV), как бы проведем линии, параллельные осям координат X, Y, Z . Тогда линия 1—2 будет параллельна оси O_X и перпендикулярна оси O_Y , 3—4 будет параллельна оси O_Y и перпендикулярна оси O_X , 5—6 будет параллельна оси O_Z и перпендикулярна оси O_X . На каждую из шести граней действуют давления P_{xx}, P_{yy}, P_{zz} , и силы трения, точнее, касательные напряжения $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$.

Мы привели напряжения, действующие на грани 1 ($p_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$), 3 ($p_{yy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}$) и 5 ($p_{zz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$), выбрав наиболее близкие к началу координат (конечно, можно поступить по-другому и выбрать и грани 1, 4, 6), причем, если первый индекс у напряжений показывает ось координат, к которой перпендикулярна рассматриваемая грань, то второй индекс показывает, какой оси эта грань параллельна — именно по этой оси действуют напряжения.

Для граней 2, 4, 6 значения напряжений будут следующими: для грани 2 нормальное напряжение — $p_{xx} + (\partial p_{xx}/\partial x)dx$, касательное напряжение

$$\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx; \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx. \quad (202)$$

Соответственно, для грани 4 нормальное напряжение — $p_{yy} + (\partial p_{yy}/\partial y)dy$, касательные

$$\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy; \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy.$$

Для грани 6

$$p_{zz} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} dz; \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz; \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz. \quad (203)$$

Будем считать, что для любой точки жидкости

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (204)$$

Тогда из шести касательных напряжений остается только три, поскольку попарно они равны. Поэтому для описания движения вязкой жидкости оказываются достаточными всего шесть независимых компонентов:

$$p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, \tau_{xy} \text{ (или } \tau_{yx}), \tau_{xz} \text{ (} \tau_{zx}), \tau_{yz} \text{ (} \tau_{zy}).$$

Теперь для того, чтобы получить уравнение движения жидкости, требуется найти сумму проекций, действующих на $dV = dx dy dz$ сил на оси координат. Проекцией суммарной массовой силы является $F_x \rho dx dy dz$, где F_x — x -вая компонента плотности массовых сил; $\rho dx dy dz = dV$ — масса объема dV .

Теперь определим x -вые проекции нормальных и касательных напряжений:

$$\text{для грани 1 — } p_{xx} dy dz; \tau_{xy} dx dz; \tau_{zx} dx dy;$$

$$\text{для грани 2 — } (p_{xx} + (\partial p_{xx} / \partial x) dx) dy dz;$$

$$\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz;$$

$$\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy.$$

Очевидно, что сумма всех этих компонентов есть суммарная проекция всех сил, которая в данном случае является произведением массы ρdV на проекцию ускорения движения его центра (или полюса) dU_x/dt , то есть

$$\begin{aligned} & F_x \rho dx dy dz - p_{xx} dy dz + \left(p_{zz} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz - \tau_{yx} dx dz + \\ & = \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dy dz - \tau_{zx} dx dy + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy = \quad (205) \\ & = \rho dx dy dz \frac{dU_x}{dt}, \end{aligned}$$

где U_x — проекция мгновенной скорости точки на ось O_x .

Знак минус перед слагаемыми означает их противоположность с рассматриваемой осью координат. Раскрыв скобки и сократив подобные слагаемые, имеем:

$$\rho F_x + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \frac{dU_x}{dt}. \quad (206)$$

Аналогичное уравнение легко можно получить для осей O_y и O_z ; объединив все три уравнения в систему, получим (предварительно разделив на ρ):

$$\begin{cases} F_x \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) = \frac{dU_x}{dt} \\ F_y \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) = \frac{dU_y}{dt} \\ F_z \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) = \frac{dU_z}{dt} \end{cases}.$$

Полученную систему называют **уравнением движения вязкой жидкости в напряжениях**.

2. Деформация в движущейся вязкой жидкости: напряжение и скорость деформации

В вязкой жидкости имеются силы трения, в силу этого при движении один слой тормозит другой. В итоге возникает сжатие, деформация жидкости. Из-за этого свойства жидкость и называют вязкой.

Если вспомнить из механики закон Гука, то по нему напряжение, которое возникает в твердом теле, пропорционально соответствующей относительной деформации. Для вязкой жидкости относительную деформацию заменяет скорость деформации. Речь идет об угловой скорости деформации частицы жидкости $d\Theta/dt$, которую по-другому называют скоростью деформации сдвига. Еще Исааком Ньютоном установлена закономерность о пропорциональности

силы внутреннего трения, площади соприкосновения слоев и относительной скорости слоев. Также им было установлено

$$\tau = \mu \frac{\Theta}{dt}, \quad (207)$$

коэффициент пропорциональности динамической вязкости жидкости. Деформация возникает между двумя слоями жидкости со скоростями U и $U + dU$, образуется скорость деформации сдвига $d\Theta/dt$. dU — это толщина одного слоя жидкости: ее поверхности со временем отстают (или опережают) друг друга на расстояние $dUdt$. Согласно установленному Ньютоном закону внутреннего трения, в движущейся вязкой жидкости между касательным напряжением τ и скоростью деформации жидких частиц установлена зависимость:

$$\tau = \pm \mu \frac{dU}{dn}, \quad (208)$$

где dU/dn — градиент скорости по нормали к направлению движения; знак « \pm » для обеспечения положительного значения τ независимо от направления напряжения n . Поскольку, как видно из рисунка, $\sin\Theta = dUdt/dn$, то, согласно законам тригонометрии, при малых углах Θ $\sin\Theta \approx \Theta = d\Theta$, то $d\Theta = dUdt/dn$,

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{dU}{dn}, \quad (209)$$

Подставив (209) в (208), получаем (207).

Если выразить касательное напряжение через его компоненты, то

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \\ \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right), \\ \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right). \end{cases} \quad (210)$$

Таким образом, мы установили соотношения между напряжениями, деформацией τ со скоростью деформации $d\Theta/dt$, а также между τ и компонентами скорости потока.

А что касается нормальных напряжений (τ — это касательная составляющая деформации), которые зависят от направления действия, то они зависят также от того, к какой площади они приложены. Это их свойство называют **инвариантностью**. В качестве этих напряжений, в основном, подразумевается давление в жидкости: это давление может быть определено как сумма значений нормальных напряжений, то есть, если взять компоненты этого напряжения (давления), то

$$p = \frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3}. \quad (211)$$

Как видно из (211), p действительно зависит от направления приложения силы. Чтобы окончательно установить зависимость между p и $d\Theta/dt$ через зависимость между нормальными (p_{xx} , p_{yy} , p_{zz}) и касательными ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{yx} = \tau_{xy}$; $\tau_{zx} = \tau_{xz}$), представив из (211)

$$p_{xx} = -p + p'_{xx}, \quad (212)$$

где p'_{xx} — добавочные нормальные напряжения, которые и зависят от направления воздействия, по аналогии с формулой (210) получим:

$$p'_{xx} = 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial x}. \quad (213)$$

Формулу (203) привели без вывода. Сделав то же самое для компонентов p_{yy} , p_{zz} , получили следующую систему:

$$\begin{cases} p_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ p_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ p_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial z} \end{cases}. \quad (214)$$

Поскольку p направлено всегда вовнутрь объема dV , то перед ним стоит знак минус, то есть p направлено осям XYZ . Объединив системы (214) и (210), то есть записав вместе, мы получим еще и зависимость между нормальными p и касательными напряжениями.

3. Уравнение Бернулли для движения вязкой жидкости

Элементарная струйка при установившемся движении вязкой жидкости

Уравнение для этого случая имеет вид (приводим его без вывода, поскольку его вывод сопряжен с применением некоторых операций, приведение которых усложнило бы текст):

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{U_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{U_2^2}{2g} + h_{\text{пр}}. \quad (215)$$

Схожесть уравнения (215) с уравнением (186) очевидна: разница только в присутствии в правой части (205) потери напора (или удельной энергии) $h_{\text{пр}}$. Эта потеря — результат того, что часть энергии превращается из механической в тепловую. Поскольку процесс необратим, то имеет место потеря напора.

Этот процесс называется **диссипацией** энергии. Другими словами, $h_{\text{пр}}$ можно рассматривать как разность между удельной энергией двух сечений, при движении жидкости от одного к другому происходит потеря напора. Удельная энергия — это энергия, которую содержит единичная масса.

Поток с установившимся плавно изменяющимся движением. Коэффициент удельной кинематической энергии X

Для того, чтобы получить уравнение Бернулли в этом случае, приходится исходить из уравнения (215), то есть из струйки надо переходить в поток. Но для этого нужно определиться, что представляет собой энергия потока (которая состоит из суммы потен-

циальной и кинематической энергий) при плавно изменяющемся потоке.

Разберемся с потенциальной энергией: при плавном изменении движения, если поток установившийся,

$$U_x \approx U; U_y \approx 0; U_z \approx 0; \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (216)$$

Поэтому уравнение движения имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x - \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U_x}{\partial x} U_x + \nu \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2}, \\ F_y - \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ F_z - \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \end{array} \right.$$

где $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость жидкости.

В силу идентичности последних двух уравнений, можно предположить, что при рассматриваемом движении давление по живому сечению распределено согласно гидростатическому закону, т. е.

$$Z + \frac{p}{\rho g} = \text{const.}$$

Причем это верно для любой точки живого сечения. Определимся теперь с удельной кинематической энергией потока. Эту энергию можно определить двумя способами: через местную или через среднюю скорость. Удельная энергия E_{ku} , определенная через местную скорость, есть отношение массы жидкости, которая течет через живое сечение ω за единицу времени со скоростью u . Однако E_{ku} вычислена по элементарным площадкам $d\omega$.

$\int_{\omega} \gamma u d\omega \frac{u^2}{2}$ — это числитель к весу жидкости $\rho g Q$, т. е.

$$E_{ku} = \frac{\int_{\omega} \gamma u d\left(\omega \frac{u^2}{2}\right)}{\rho Q g} = \frac{1}{2gQ} \int_{\omega} u^3 d\omega, \quad (217)$$

где ρ — плотность жидкости;
 Q — расход жидкости;
 ρQ — масса жидкости;
 g — ускорение силы тяжести;
 U — местная скорость;
 ω — живое сечение потока.

На первый взгляд, формула (207) проста, однако вычислить E_{ku} по $u = u(x, y, z)$ довольно сложно. Не всегда удается определить эту функцию.

Поэтому попробуем вычислить кинематическую энергию через среднюю скорость $v = Q/\omega$. Из механики известно, что кинематическая энергия представляет собой выражение $mv^2/2$. По аналогии, здесь будет $m \rightarrow \rho Q$. Но поскольку мы определяем удельную энергию, то придется относить ее к единичной массе путем деления массы на $\rho Q g$. Тогда

$$E_k v = \frac{\rho Q v^2}{2} = \frac{v^2}{2g}. \quad (218)$$

Если найти отношение двумя способами полученных удельных кинематических энергий, то

$$X = \frac{E_{ku}}{E_{kv}} = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \left(\frac{u}{\omega}\right)^3 d\omega. \quad (219)$$

Здесь учтено, что $Q = v\omega$, точнее $1/v\omega = 1/Q$. Из (219) следует:

$$E_{ki} = XE_k v, \quad (220)$$

где величину X называют **коэффициентом кинетической энергии, или коэффициентом Кориолиса**. Коэффициент X всегда больше 1. Из (220) следует:

$$E_{ki} = \frac{Xv^2}{2g}. \quad (221)$$

Теперь для уравнения Бернулли найдена и кинетическая энергия. Остается отметить, что действительной кинетической энергией является E_{ki} . $E_k v$ — предполагаемая кинетическая энергия при условии, что $U_i = v_i$ для любой i -той точки, где $i = 1, 2, 3, \dots, k$.

В силу плавности движения жидкости для любой точки живого сечения потенциальная энергия $En = Z + p/\rho g$. Удельная кинетическая $E_k = Xv^2/2g$. Поэтому для сечения 1—1 полная удельная энергия

$$E_1 = En + E_{k1} = Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{x_1 v_1^2}{2g}. \quad (222)$$

Сумму правой части (222) также называют **гидродинамическим напором Н**. В случае невязкой жидкости $U^2 = xv^2$. Теперь остается учесть потери напора $h_{пр}$ жидкости при ее движении к сечению 2—2 (или 3—3). Например, для сечения 2—2:

$$E_2 = E_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{x_2 v_2^2}{2g} + h_{пр}. \quad (223)$$

Следует отметить, что условие плавной изменяемости должно быть выполнено только в сечениях 1—1 и 2—2 (только в рассмат-

риваемых): между этими сечениями условие плавной изменчивости необязательно.

В формуле (223) физический смысл всех величин приведен ранее: индекс 1, 2 говорит о принадлежности этих величин к соответствующим сечениям 1—1 и 2—2. Таким образом, искомое уравнение Бернулли получено: (223) является этим уравнением. В силу того, что все члены (223) имеют линейную размерность, уравнение можно интерпретировать, как и в случае с невязкой жидкостью, геометрически.

В основном все так же, как и в случае с невязкой жидкостью, основная разница в том, что теперь напорная линия $E = H = Z + p/\rho g + Xv^2/2g$ не параллельна к горизонтальной плоскости сравнения, поскольку имеет места потери напора. Поэтому, например, в сечении 2—2 напор меньше, чем в сечении 1—1. Здесь H — гидродинамический напор. А что касается пьезометрического напора $v + p/\rho g$, то он может быть в сечении 2—2 больше или меньше, чем в сечении 1—1.

4. Гидравлический и пьезометрический уклоны

Степень потери напора $h_{\text{пр}}$ по длине называют **гидравлическим уклоном** J . Если потеря напора $h_{\text{пр}}$ происходит равномерно, то

$$J = \frac{h_{\text{пр}}}{l} = \frac{\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{x_1 v_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{x_2 v_2^2}{2g} \right)}{l}. \quad (224)$$

Числитель в формуле (224) можно рассматривать как приращение напора dH на длине dl .

Поэтому в общем случае

$$J = \frac{dH}{dl} = -\frac{d}{dl} \left(Z + \frac{p}{\rho g} + \frac{Xv}{2g} \right). \quad (225)$$

Знак минус перед dH/dl — потому, что изменение напора по его течению отрицательно.

Если рассмотреть изменение пьезометрического напора $Z + p/\rho g$, то величину (225) называют **пьезометрическим уклоном**.

Напорная линия, она же линия удельной энергии, находится выше пьезометрической линии на высоту $u^2/2g$: здесь то же самое, но только разница между этими линиями теперь равна $uv^2/2g$. Эта разница сохраняется также при безнапорном движении. Только в этом случае пьезометрическая линия совпадает со свободной поверхностью потока.

В открытых руслах, если движение равномерное, то обозначают уклон дна этого русла как i . Все три вида уклонов связаны между собой простым выражением

$$J = J_{\text{п}} = i = \frac{h_{\text{пр}}}{l}. \quad (226)$$

5. Уравнение Бернулли

для неустановившегося движения вязкой жидкости

Для того, чтобы получить уравнение Бернулли, придется определить его для элементарной струйки при неустановившемся движении вязкой жидкости, а затем распространять его на весь поток.

Прежде всего, вспомним основное отличие неустановившегося движения от установившегося. Если в первом случае в любой точке потока местные скорости изменяются по времени, то во втором случае таких изменений нет.

Приводим уравнение Бернулли для элементарной струйки без вывода:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{U_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{U_2^2}{2g} + h_{\text{пр}} = +h_{\text{ин}}. \quad (227)$$

Аналогия формулы (227) с формулой (215) очевидна, только в правой части (227) присутствует дополнительное слагаемое $h'_{ин}$, которое называют инерционным напором. Чтобы подчеркнуть, что речь идет об элементарной струйке, его обозначают как $h'_{ин}$. Поскольку инерционный напор обусловлен местными ускорениями, то

$$h'_{ин} = \frac{1}{g} \int_{l_2}^{l_1} \frac{\partial u}{\partial t} dl. \quad (228)$$

В формуле (178) p_1, p_2 — давление, u_1, u_2 — скорости, Z_1, Z_2 — высоты от плоскости сравнения, $h_{ГП}$ — потеря напора между двумя сечениями в соответствующих индексах сечения струйки.

Определим силу инерции, соответствующей единичному весу вязкой жидкости:

$$\frac{\rho d\omega dl \frac{du}{dt}}{\rho g d\omega dl} = \frac{1}{g} \times \frac{du}{dt}. \quad (229)$$

Если представим

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{du}{dl} \times \frac{dl}{dt} \quad (230)$$

и подставим вместо du/dt в правой части (229), то получим следующее выражение:

$$\frac{\rho d\omega dl \frac{du}{dt}}{\rho g d\omega dl} = \frac{1}{g} \left(\frac{du}{dt} + \frac{1}{g} \times \frac{du}{dl} \times \frac{dl}{dt} \right). \quad (231)$$

Величина, выраженная в (231), является силой инерции единичного веса жидкости: первое слагаемое в (231) называют **локальной силой инерции**, второе слагаемое — **конвективной силой инерции**.

Искомым уравнением Бернулли для элементарной струйки является уравнение (217): для струйки вязкой несжимаемой жидкости при неустановившемся движении. Для перехода к аналогичному уравнению для потока требуется:

- 1) чтобы характер движения остался таким же, что и у струйки;
- 2) несмотря на то, что скорости изменяются по времени, формы линий тока одни и те же;
- 3) осреднение всех членов уравнения (227) по живому сечению.

Поэтому осредним инерционный напор для потока

$$h_{ин} = \int_{\omega} h' dh'. \quad (232)$$

Умножим и разделим это выражение на ρQg и подставим h' по (179):

$$\frac{1}{\rho h Q} \int_{\omega} h'_{ин} \rho g u d\omega = \frac{1}{Q} \int_{\omega} u d\rho \times \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial u}{\partial t} dl,$$

где $u d\omega = dQ$ не зависит от длины в силу условий 2.

Следовательно, количество движения у потока, если считать его по местным скоростям,

$$(KD)_u = \int_{\omega} \rho u d\omega u = \rho \int_{\omega} u^2 d\omega. \quad (233)$$

Но количество движения мы можем считать и по средней скорости v_1 , если предположим, что в каждой точке живого сечения скорость равна v .

$$(KД)_v = \rho v^2 \omega, \quad (234)$$

здесь учтено, что $v\omega = Q$; $\rho Q = m$; $mv = (KД)_v$.

Так же, как и в случае с удельной кинетической энергией, считать $(KД)_v$ не так-то просто. Чтобы считать, нужно связать его с $(KД)_u$. Для этого служит коэффициент количества движения

$$a' = \frac{(KД)_u}{(KД)_v} = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \left(\frac{u}{v} \right)^2 d\omega. \quad (235)$$

Аналогия с (219) не случайна, как a , так и a' выражают отношения идентичных величин, которые получены при схожих положениях. Коэффициент a' принято называть еще и **коэффициентом Бусинеска**. С учетом a' , средний инерционный напор по живому сечению

$$h_{ин} = \frac{a}{g} \times \frac{1}{\omega} \times \frac{dQ}{dt}. \quad (236)$$

Тогда, заменив в (227) U_1^2 на $x_1 v_1^2$, U_2^2 на $x_2 v_2^2$, переходим к уравнению Бернулли для потока, получение которого и являлось задачей рассматриваемого вопроса. Оно имеет следующий вид:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{x_1 v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_{пр} + h_{ин}, \quad (237)$$

где

$$h_{ин} = \frac{x_1 l}{g} \times \frac{dv}{dt}. \quad (238)$$

Физический смысл всех параметров в формуле (237) тот же, что и в (227). Что касается (237), то оно получено из (236) с учетом того, что $dQ = \omega dv$; подставив dQ в (236) и сократив ω , приходим к (238).

Отличие $h_{ин}$ от $h_{пр}$ прежде всего в том, что оно не является необратимым. Если движение жидкости с ускорением, что значит $dv/t > 0$, то $h_{ин} > 0$. Если движение замедленное, то есть $dv/t < 0$, то $h_{ин} < 0$.

Уравнение (237) связывает параметры потока только в данный момент времени. Для другого момента оно может уже оказаться не достоверным.

ЛЕКЦИЯ № 7. Режимы движения жидкости. Уравнение Рейнольдса

Несмотря на то, что в предыдущих лекциях, по разным поводам пришлось рассмотреть множество разновидностей движения жидкости, в действительности у жидкости всего два вида движения: **ламинарное** и **турбулентное**.

Все остальные виды движения — производные от этих двух видов движения, которыми (в большей степени турбулентным) мы в дальнейшем будем оперировать.

Эти движения замыкают как бы некий список превращений движений жидкости, которые происходят между этими видами.

Следовательно, режим движения жидкости зависит от энергетического состояния ее частиц.

Из последнего утверждения нетрудно прийти к выводу о том, что вопросы энергетические, в том числе вопрос о потере напора в движении жидкости, в дальнейшем будут в центре нашего внимания.

1. Ламинарный и турбулентный режимы движения жидкости. Число Рейнольдса

Как нетрудно было убедиться в вышеприведенном опыте, если фиксировать две скорости в прямом и обратном переходах движения в режимы ламинарное \leftrightarrow турбулентное, то

$$v_1 \neq v_2, \quad (239)$$

где v_1 — скорость, при которой начинается переход из ламинарного в турбулентный режим;

v_2 — то же самое при обратном переходе.

Как правило, $v_2 < v_1$. Это можно понять из определения основных видов движения.

Ламинарным (от лат. *lamina* — слой) считается такое движение, когда в жидкости нет перемешивания частиц жидкости; такие изменения в дальнейшем будем называть пульсациями.

Движение жидкости **турбулентное** (от лат. *turbulentus* — беспорядочный), если пульсация местных скоростей приводит к перемешиванию жидкости.

Скорости перехода v_1 , v_2 называют:

v_1 — верхней критической скоростью и обозначают как $v_{в.кр}$, это скорость, при которой ламинарное движение переходит в турбулентное;

v_2 — нижней критической скоростью и обозначают как $v_{н.кр}$, при этой скорости происходит обратный переход от турбулентного к ламинарному.

Почему же эти скорости не одинаковы?

Дело в том, что, если значение $v_{в.кр}$ зависит от внешних условий (термодинамические параметры, механические условия), то значения $v_{н.кр}$ не зависят от внешних условий и постоянны.

Эмпирическим путем установлено, что:

$$v_{н.кр} = \frac{RV}{d}, \quad (240)$$

где V — кинематическая вязкость жидкости;

d — диаметр трубы;

R — коэффициент пропорциональности.

В честь исследователя вопросов гидродинамики вообще и данного вопроса в частности, коэффициент, соответствующий $v_{н.кр}$, называется **критическим числом Рейнольдса** $Re_{кр}$.

Если изменить V и d , то $Re_{кр}$ не изменяется и остается постоянным.

$$K = \frac{v_{н.кр} d}{V} = 2320 = Re_{кр}.$$

Именно это постоянство и предопределяет неизменность $v_{н.кр}$.
 Для общего случая это число называют числом Рейнольдса $Re_{кр}$, оно задается комплексом:

$$\frac{vl}{\mu} = \frac{v l}{M}, \quad (241)$$

где v — скорость движения жидкости;

l — линейный размер живого сечения;

ρ — плотность жидкости;

V, μ — соответственно кинематическая и динамическая вязкости.

Очевидно, что $Re_{кр}$ является показателем скорости, при которой происходит превращение двух видов движения друг в друга. Поэтому, если $Re < Re_{кр}$, то режим движения жидкости **ламинарный**, поскольку $v < v_{кр}$; если $Re > Re_{кр}$, то режим движения **турбулентный** из-за того, что $v > v_{кр}$.

Физический смысл числа Re в вышеизложенном: другими словами, Re является параметром взаимоотношений сил инерционных и трения (вязкости).

В зависимости от того, по какой характеристике потока рассматривается движение жидкости, различают число Рейнольдса соответствующее этим параметрам, для чего пишут соответствующий индекс.

Например, исходя из формулы (241), в зависимости от преобладания линейных величин можно определить

$$Re_d = \frac{vd}{V}; \quad Re_R = \frac{vR}{V}; \quad Re_h = \frac{vh}{V}.$$

Переход «ламинарное — турбулентное» не происходит сразу. Если где-то в потоке возник очаг турбулентности, то он уносится движением, и на его месте теперь ламинарное движение, то есть

в рассматриваемом сечении оба вида движения как бы чередуются друг с другом.

Только дальнейший рост скорости приводит к полному превращению «ламинарное — турбулентное».

Таким образом, превращение «ламинарное — турбулентное» происходит в течение определенного времени, характеристикой этого перехода является коэффициент перемежаемости β . Этот коэффициент является отношением времени, за которое формировалось турбулентное движение, ко всему времени наблюдения.

Следовательно $0 \leq \beta < 1$. При $\beta = 0$ движение ламинарное, при $\beta = 1$ — турбулентное. Переход происходит, пока $0 < \beta < 1$.

2. Из теории турбулентного движения.

Осредненные скорости.

Пульсационные составляющие

Несмотря на то, что при турбулентном движении частицы жидкости из-за беспорядочного изменения движутся хаотично, тем не менее, в этом хаосе можно найти определенную закономерность: пульсации местных скоростей все же происходят в рамках некоторого коридора, вокруг некоторого значения. В теории турбулентного движения очень многое связано с именем исследователя этого движения Рейнольдса. Рассматривая хаотическое турбулентное движение, он представил мгновенные скорости, как некоторые суммы. Эти суммы имеют вид:

$$u_x = \bar{u}_x + u'_x; \quad u_y = \bar{u}_y + u'_y; \quad u_z = \bar{u}_z + u'_z; \quad p = \bar{p} + p'; \quad (242)$$

где u_x, u_y, u_z — мгновенные значения проекций скорости;

p, τ — то же самое, но для напряжений давления и трения;

черта у величин наверху означает, что параметр усреднен по времени; у величин $u'_x, u'_y, u'_z, p', \tau'$ черта сверху означает, что имеется в виду пульсационная составляющая соответствующего параметра («добавка»).

Осреднение параметров по времени осуществляется по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\bar{p} &= \frac{1}{T} \int_0^T p dt, \\ u'_i &= \frac{1}{T} \int_w^T u_i dt;\end{aligned}\tag{243}$$

где $\bar{\tau} = \frac{1}{T} \int_0^T \tau dt$ — интервал времени, в течение которого проводится осреднение.

Из формул (242) следует, что пульсируют не только проекции скорости, но и нормальные p и касательные τ напряжения. Значения усредненных во времени «добавок» должны быть равны нулю: например для x -ой компоненты:

$$\bar{u}'_x = \frac{1}{T} \int_0^T u'_x dt = 0.\tag{244}$$

Для остальных «добавок» из (242) запись формул аналогична (241) или (243), то есть осредненные во времени $\bar{u}'_y, \bar{u}'_z, \bar{p}', \bar{\tau}'$ имеют такие же выражения, как и в (244); только \bar{u}'_x заменяет соответствующий параметр.

Интервал времени T определяют достаточным, чтобы при повторном осреднении значение «добавки» (пульсирующей составляющей) не изменилось.

Турбулентное движение считается неустановившимся движением. Несмотря на возможное постоянство осредненных параметров, мгновенные параметры все же пульсируют. Следует запомнить: осредненная (по времени и в конкретной точке) и средняя (в конкретном живом сечении) скорости — не одно и то же:

$$\bar{u}_i \neq v,\tag{245}$$

где $v = Q/w$; Q — расход жидкости, которая течет со скоростью v через w .

А как оценить пульсационные составляющие («добавки») $\bar{u}'_i, \bar{p}', \bar{\tau}'$?

С этой целью принят стандарт, который называется **среднеквадратическим отклонением**. Для x -ой компоненты соответствующее выражение этого стандарта:

$$\delta_{ux} = \sqrt{(\bar{u}'_x)^2}. \quad (246)$$

Чтобы получить формулу для любого параметра «добавки» из формулы (242), достаточно заменить u_x в (246) на искомый параметр.

Среднеквадратичное отклонение можно относить к следующим скоростям: усредненная местная скорость данной точки; средняя по вертикали; средняя по живому сечению; максимальная скорость.

Обычно максимальная и средняя по вертикали скорости не используются; используются две из вышеперечисленных характерных скорости. Кроме них, используют также динамическую скорость.

$$u_x = \sqrt{gRL}, \quad (247)$$

где R — гидравлический радиус;

J — гидравлический уклон.

Среднеквадратичное отклонение, отнесенное к средней скорости, есть, например, для x -ой компоненты:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_{ux}}{v}. \quad (248)$$

Но лучшие результаты получаются, если среднеквадратичное отклонение относить к u_x , то есть динамической скорости, например

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_{ux}}{u_x}. \quad (249)$$

Для остальных стандартов δ , выражение будет то же самое.

Пример: если среднеквадратичное отклонение отнесено к средней скорости потока, то

$$\frac{\delta_{vx}}{v}; \frac{\delta_{vy}}{v}; \frac{\delta_{vz}}{v}.$$

Определим степень (интенсивность) турбулентности, как называют величину ε :

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_{vx}}{v}; \varepsilon_y = \frac{\delta_{vy}}{v}; \varepsilon_z = \frac{\delta_{vz}}{v}.$$

Однако лучшие результаты получаются, если за масштаб скорости (то есть за характерную скорость) взять динамическую скорость u_x .

Еще одним свойством турбулентности является частота пульсаций скорости. Речь идет о спектре этих частот при турбулентном движении. Средняя частота пульсации в точке с радиусом r от оси потока:

$$w_r = \frac{N}{T},$$

где N — половина экстремума вне кривой мгновенных скоростей;

T — период осреднения;

$T/N = 1/w$ — период пульсации.

Поскольку на практике и при напорном, и при безнапорном движениях имеют место в основном низкочастотные пульсации, то освещение этого вопроса находим не столь актуальным. В случае необходимости, читатель может получить дополнительную информацию из специальной литературы.

3. Распределение скоростей при равномерном установившемся движении. Ламинарная пленка

Все же, несмотря на вышеперечисленные и другие особенности, о которых не сказано из-за их не востребоваемости, основным

признаком турбулентного движения является перемешивание частиц жидкости. Принято об этом перемешивании с точки зрения количества говорить как о перемешивании молей жидкости.

Как мы убедились выше, с ростом числа Re интенсивность турбулентности ε растет. Несмотря на это, все же, например, у внутренней поверхности трубы (или у любой другой твердой стенки) существует некоторый слой, в пределах которого все скорости, в том числе пульсационные «добавки», равны нулю: это очень интересное явление.

Этот слой принято называть **вязким подслоем потока**.

Само собой на границе соприкосновения с основной массой потока этот вязкий подслой все же имеет некоторую скорость. Следовательно, все изменения в основном потоке передаются и в подвязкий слой, но их значение очень мало. Это позволяет считать движение слоя ламинарным.

Ранее, считая, что эти передачи в подвязкий слой отсутствуют, слой назвали ламинарной пленкой. Теперь нетрудно убедиться, что с точки зрения современной гидравлики ламинарность движения в этом слое относительная (интенсивность ε в подвязком слое (ламинарной пленке) может достигать значения 0,3. Для ламинарного движения это достаточно большая величина).

Подвязкий слой ε_δ очень тонкий по сравнению с основным потоком (см. рисунок). Именно наличие этого слоя порождает потери напора (удельной энергии).

Что касается толщины ламинарной пленки δ_δ , то она обратно пропорциональна числу Re . Это более наглядно видно из следующего сравнения толщины в зонах потока при турбулентном движении:

Вязкий (ламинарный) слой — $0 < ua/V < 7$.

Переходная зона — $7 < ua/V < 70$.

Турбулентное ядро — $ua/V > 70$.

В этих соотношениях u — динамическая скорость потока, a — расстояние от твердой стенки, V — кинематическая вязкость.

Углубимся немного в историю теории турбулентности: эта теория включает в себя совокупность гипотез, на основании ко-

торых были получены зависимости между основными параметрами $\bar{u}_i, \bar{\tau}$ турбулентного движения потока.

У разных исследователей к этому вопросу были разные подходы. Среди них немецкий ученый *Л. Прандтль*, советский ученый *Л. Ландау* и многие другие.

Если до начала XX в. ламинарный слой, по мнению ученых, представлял собой некоторый мертвый слой, в переходе к которому (или от которого) происходит как бы разрыв скоростей, то есть скорость меняется скачкообразно, то в современной гидравлике совсем другая точка зрения.

Поток — это «живое» явление: все переходные процессы в нем носят непрерывный характер.

4. Распределение скоростей в «живом» сечении потока

Вопрос о «разрывности» скоростей на границе перехода «ядро потока — пограничный слой» бытовал до конца первой трети XX в., потому что все исследователи пытались решить проблемы турбулентного движения методами математического анализа, который для такого сложного движения, как турбулентное, является пиковым.

Пограничный слой состоит из переходного слоя и ламинарной пленки.

По сложности турбулентное движение сопоставимо с квантовой электродинамикой: только одни и те же закономерности проявляют себя по-разному, поскольку среды — разные.

Современной гидродинамике удалось разрешить эти проблемы, применив **метод статистического анализа**. Основным орудием этого метода является то, что исследователь выходит за рамки традиционных подходов и применяет для анализа некие средние по времени характеристики потока: разумеется, они не являются истинными, но позволяют получать закономерности, которые, в свою очередь, позволяют изложить механизм турбулентного движения и качественно, и количественно.

Усредненная скорость

Ясно, что в любой точке живого сечения любую мгновенную скорость u можно разложить на u_x , u_y , u_z компоненты.

Требуется определить: чему же равна эта мгновенная скорость?

Эта скорость, как известно, непостоянна и резко меняется по времени. Поэтому, согласно методам статистического анализа, вводится усредненная скорость \bar{u} , о которой уже сказано выше.

Если выделить в потоке некоторый его элемент поперечного сечения ΔF , то, считая u_x соответствующей этому элементу продольной скоростью, определим количество жидкости в объеме V , которое протекает через него за время dT , а поскольку $dV = u_x \Delta F dt$, то за время t :

$$V = \int_0^t u_x \Delta F dt. \quad (250)$$

В таком случае элементарный расход жидкости

$$dQ = \frac{V}{t} = \frac{\Delta F \int_0^t u_x dt}{t}.$$

Видно, что речь идет как бы об усредненной скорости u по времени t .

Значит, элементарный расход можно рассчитать и по некоторой средней по времени \bar{u}_x :

$$dQ = \bar{u}_x \Delta F.$$

Приравняв формулы, определяем

$$\bar{u}_x = \frac{\int_0^t u_x dt}{t}. \quad (251)$$

Полученную скорость можно назвать **скоростью, усредненной по времени**, или **средней местной**, эта скорость \bar{u}_x — фиктивно постоянная и позволяет судить о характеристике потока.

Вычислив \bar{u}_y, \bar{u}_z можно получить вектор усредненной скорости:

$$\bar{u} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}. \quad (252)$$

Теперь легче определить пульсационные «добавки» \bar{u}'_x , поскольку усредненная скорость

$$u_x = \bar{u}_x + u'_x.$$

Но \bar{u}'_x можно определить также аналогично методике определения \bar{u}_x .

Касательные напряжения

Возвращаясь к формуле (242)

$$\tau = \bar{\tau} + \tau',$$

определим и суммарное значение касательного напряжения τ . Поскольку это напряжение возникает из-за наличия сил внутреннего трения, то жидкость считают ньютоновой (для нее верна гипотеза И. Ньютона, то есть формула (253)). Поэтому к ее анализу применяются ньютоновы законы для внутреннего трения в вязкой жидкости.

По И. Ньютону, силы сопротивления, которые возникают в жидкости, являются результатом разности скорости скользящих относительно друг другу слоев и пропорциональны площади соприкосновения этих слоев.

Если предположить, что площадь соприкосновения — единичная, то сила сопротивления

$$\tau = \mu \left(\frac{d|}{dy} \right), \quad (253)$$

где μ — динамическая вязкость жидкости;

dv/dy — изменение скорости. Эту величину часто называют **градиентом скорости**, или **скоростью сдвига**.

Если расстояние между рассматриваемыми слоями считать равным n , а скорость верхнего слоя — v_1 , которая постоянна, то

$$\frac{dv}{dy} = \frac{v_1}{n}.$$

Если определить $dv/dy = f(x)$ как некоторую функцию $f(x)$, то эту формулу можно применять и для неньютоновских жидкостей.

Но как определить второе слагаемое в формуле $\tau = \bar{\tau} + \tau'$, чтобы найти полное напряжение?

Решение этого вопроса предложено аналогично предыдущему, но другим ученым **Буссинеском** в конце XIX в.:

$$\tau' = \frac{Adv}{dy}, \quad (254)$$

где A — турбулентная вязкость, но следует помнить, что этот коэффициент не является свойством турбулентного движения, он зависит от ε (коэффициент перемешивания, см. (250)), уменьшается при приближении к стенке трубы провода

$$A = 0.$$

В настоящее время руководствуются другим выражением, полученным в вышеупомянутом уравнении Прандтля:

$$\tau' = \rho l^2 \left(\frac{dv}{dy} \right), \quad (255)$$

где ρ — плотность жидкости;

l — длина пути, на котором рассматривается движение.

Без вывода приводим окончательную формулу для пульсационной «добавки» касательного напряжения:

$$\tau' = \rho l^2 \left(\frac{dv}{dy} \right)^2. \quad (256)$$

Интерес представляет сравнение только что полученной формулы (256) с ньютоновской формулой (253):

- 1) если движение ламинарное, то нет никакой турбулентности, то есть перемешивания частиц; поэтому $l = 0$, и формула (256) превращается в (253), по которой касательное напряжение $\tau \sim (\mu, v)$ в первой степени;
- 2) если движение турбулентное, то есть Re значительное, то l имеет место, и ролью τ' в формуле $\tau = \bar{\tau} + \tau'$ нельзя пренебрегать, и полное напряжение определяется формулой (256), то есть напряжение вязкости незначительно, но только при больших значениях числа Re .

5. «Шероховатость» и «гладкость» стенок

Рассматривая выше механизм турбулентного движения, мы убедились: по мере удаления от оси потока к стенкам трубы скорость движения уменьшается, а у стенки вовсе равна нулю.

Дело в том, что у любой поверхности имеются неровности в разной степени, например, на дне канала. В трубах эти неровности predeterminedены технологией изготовления материала, из которого делают трубы.

По мере удаления от стенок к центру влияние неровностей на поток сходит на нет.

Именно эти неровности порождают явление, которое принято называть гидравлическим сопротивлением, а сами неровности в гидравлике называют шероховатостью.

Шероховатость может возникать и в результате естественного износа (ржавчина, отложения осадков и др.).

По величине и форме различают **однородную** и **неоднородную**, **регулярную** и **подвижную** шероховатости.

Если у неровностей геометрия и относительное расположение одинаковое, то шероховатость однородная, в противном случае — неоднородная. Регулярность шероховатости — понятие о периодичности расположения неровностей, об их повторяемости.

Если обозначить высоту выступа неровности Δ , то отношения $\varepsilon = \Delta/d, \Delta/h$, где d — диаметр трубы, h — высота потока в открытом русле, называют относительной шероховатостью. Обратные отношения $\varepsilon = d/\Delta, h/\Delta$ называют **относительной гладкостью**.

Если рассматривается поток в открытых руслах (каналы, река), то течение само может формировать шероховатость (подвижную) из осадков. Несмотря на все разновидности, шероховатость характеризуется в основном величиной Δ , которую называют абсолютной шероховатостью. Если сравнивать Δ с толщиной вязкого подслоя $\delta_{в.с.}$, то в зависимости от их соотношения, различают следующие случаи:

- 1) $\Delta < \delta_{в.с.}$; потери энергии наименьшие, вязкий подслей покрывает неровности, и основная часть потока не соприкасается с шероховатой стенкой;
- 2) $\Delta > \delta_{в.с.}$; в этом случае шероховатость проникает в основную часть потока, в турбулентную область, и это приводит еще к большей потере энергии.

Но поскольку сама толщина $\delta_{в.с.}$ зависит от числа Re , а оно от скорости потока, то понятия о гидравлических шероховатостях и гладкостях относительны.

Поэтому введены понятия относительных шероховатостей и гладкостей, о которых сказано выше.

ЛЕКЦИЯ № 8. Вопросы потери напора (удельной энергии)

Затрагивая вопросы о поверхностных неровностях и шероховатостях, мы заключили, что это все приводит к появлению гидростатических сопротивлений в потоке, в конечном счете к потере напора (то есть удельной энергии). Следовательно, потери напора требуются на преодоление гидравлических сопротивлений. В связи с этим принято различать два вида потерь:

- 1) потери по длине потока, $h_g l$, которые прямо пропорциональны длине потока трубопровода;
- 2) местные потери напора h_m , потери вблизи конструктивных устройств в потоке (резкое расширение, сужение, поворот, арматура и пр.).

Общие потери напора h_{mp} являются суммой потерь напора по длине и потерь местных:

$$h_{mp} = \sum h_g l + \sum h_m. \quad (257)$$

При расчетах напора будем пользоваться методом статистического анализа, точнее, эмпирическим методом, поскольку до сих пор не известен аналитический метод расчета напоров.

Кратко отметим движения, которые будем рассматривать (эти движения различаются друг от друга, кроме всего прочего, по характеру поля скоростей):

- 1) равномерное движение, у которого v_{cp} по длине и эпюры этих скоростей постоянные;
- 2) неравномерное движение с такой же v_{cp} , но с непостоянной по длине эпюрой скоростей;
- 3) неравномерное плавно изменяющееся движение;
- 4) неравномерное движение с местными сопротивлениями.

Во всех четырех случаях учитывается, что движение ламинарное или турбулентное.

1. Параметры потока, от которых зависит потеря напора. Метод размерностей. Число Эйлера

Мы знаем, что для решения любой гидравлической задачи требуется рассчитать силы сопротивления или кинематические параметры (v).

Но какая зависимость существует между ними? Как это установить?

Наша задача — разрешить эту проблему. Неизвестный вид зависимости определяется по методу размерностей. Для этого существует π -теорема: если некоторая физическая закономерность выражена уравнением, содержащим k размерных величин, причем оно содержит n величин с независимой размерностью, то это уравнение может быть преобразовано в уравнение, содержащее $(k-n)$ независимых, но уже безразмерных комплексов.

То есть уравнение с k величинами может быть преобразовано в другое уравнение, но уже связывающее $(k-n)$ величин, которые независимы, но безразмерны.

Их независимость проявляется в том, что они не могут быть выражены через степень функций остальных комплексов. Теперь определимся: от чего зависят потери напора при установившемся движении в поле сил тяжести.

Эти параметры.

1. Геометрические размеры потока:

- 1) характерные размеры живого сечения $l_1 l_2$;
- 2) длина рассматриваемого участка l ;
- 3) углы, которыми завершается живое сечение;
- 4) свойства шероховатости: Δ — высота выступа и l_Δ — характер продольного размера выступа шероховатости.

2. Физические свойства:

- 1) ρ — плотность;
- 2) μ — динамическая вязкость жидкости;

3) δ — сила поверхностного натяжения;

4) $E_{жс}$ — модуль упругости.

3. **Степень интенсивности турбулентности**, характеристикой которой является среднеквадратичное значение пульсационных составляющих δ_u .

Что касается независимых параметров (они также имеют размерность), то в гидравлике принято в качестве базовых величин оперировать характерным размером живого сечения l_1 , как линейным размером; но в качестве характерного размера могут быть использованы также гидравлический радиус R , глубина жидкости h , диаметр трубы d и т. д.; скоростью v ; плотностью жидкости ρ .

Теперь применим π -теорему.

Исходя из приведенных выше параметров, у нас набирается 10 различных величин: $l, l_2, \Delta, l_\Delta, \Delta p, \mu, \delta, E_{жс}, \delta_u, t$.

Кроме этих, имеем еще три независимых параметра: l_1, ρ, v . Добавим еще ускорение падения g .

Всего имеем $\kappa = 14$ размерных величин, три из которых независимы.

Требуется получить $(\kappa - n)$ безразмерных комплексов, или, как их называют π -членов.

Для этого любой параметр из 11, который не входил бы в состав независимых параметров (в данном случае l_1, ρ, v), обозначим как N_i , теперь можно определить безразмерный комплекс, который является характеристикой этого параметра N_i , то есть i -тый π -член:

$$\pi_i = \frac{l_1^x v^y \rho^z}{N_i} = L^0 M^0 T^0. \quad (258)$$

Здесь углы размерности базовых величин:

$$[l_1] = L; [v] = LT^{-1}; [\rho] = ML^{-3},$$

общий вид зависимости для всех 14 параметров имеет вид:

$$f(l, l_1, l_2, \Delta, l_\Delta, \Delta p, v, \rho, \mu, g, \delta, E_{жс}, \delta_u, t) = 0. \quad (259)$$

В качестве примера определим зависимость между $\Delta p, \mu, g, \Delta$, и l_1, v, ρ то есть параметры должны быть выражены через базовые параметры $\Delta p, \mu, g, \Delta$.

1. Начнем с Δp . Будем определять безразмерный комплекс для перепада давления Δp . Согласно формуле (258),

$$\frac{[l_1]^x [v]^y [\rho]^z}{\Delta p} = L^0 M^0 T^0.$$

Учтем в (259) размерности

$$l_1 = [L]; \quad v = \left[\frac{L}{T} \right]; \quad \rho = \left[\frac{M}{L^3} \right]; \quad \Delta p = \left[\frac{M}{T^2 L} \right]^{-1}.$$

В таком случае (259) преобразуется:

$$L^x \left(\frac{L}{T} \right)^y \left(\frac{M}{L^3} \right)^z \left(\frac{M}{T^2 L} \right)^{-1} = L^0 M^0 T^0. \quad (260)$$

У нас 4 неизвестных параметра. Составим 4 уравнения, исходя из сравнения степеней в левой и правой частях (260): по сравнению степеней L

$$\begin{pmatrix} x + y - 3z + 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \\ -y + 2 = 0 \end{pmatrix} \quad (261)$$

Решив систему (261), получим искомые степени: $x = 0$; $y = 2$; $z = 1$.
Подставив x , y , z в (19), получим:

$$l_1^0 v^2 \rho^1 = \pi \Delta \rho.$$

Окончательно:

$$\pi \Delta \rho = \rho v^2 \quad (262)$$

получим безразмерный комплекс, который называют числом Эйлера — Eu .

2. Рассуждая аналогично, получаем:

$$\pi_\mu = \frac{l_1 v \rho}{\mu}, \quad (263)$$

но, поскольку кинематическая вязкость $V = \mu/\rho$, то из (263) следует

$$\pi_\mu = \frac{l_1 v}{V} = Re. \quad (264)$$

3. Для Δ :

$$\pi_\Delta = \frac{l_1}{\Delta}, \quad (265)$$

здесь получим формулу относительной гладкости в виде $(\Delta/l_1)^{-1}$, что значит: на движение влияет не просто шероховатость Δ , но безразмерная величина (265).

4. Для ускорения силы тяжести:

$$\pi_g = \frac{v^2}{g l_1} = Fr$$

этот комплекс называют числом Фруда.

Рассуждая аналогично, можно получить безразмерные величины для l_2 , Δ , $E_{ж}$, δ_u , t . Можно выразить полученные комплексы в виде

$$\pi'_i = \pi_i^{-1}.$$

2. *Равномерное движение и коэффициент сопротивления по длине*

Можно было бы этот коэффициент назвать коэффициентом потери напора. Разумеется, речь идет о ламинарном движении, при котором средняя скорость потока

$$v = \frac{Q}{w} = \frac{gJnr_0^2}{8\rho}. \quad (266)$$

При ламинарном движении (если оно равномерное) ни живое сечение, ни средняя скорость, ни эпюра скоростей по длине не меняются со временем.

При равномерном движении пьезометрический уклон

$$J_n = \frac{h_l}{l}; \quad r_0 = \frac{d}{2}, \quad (267)$$

где l_1 — длина потока;

h_l — потери напора на длине L ;

r_0, d — соответственно радиус и диаметр трубы.

С учетом (267), из (266) следует:

$$v = \frac{gh_l d^2}{32VL}, \quad (268)$$

чтобы ввести Re , (268) можно переписать в виде

$$h_l = \frac{32Vl}{d^2g} = \frac{64lv^2}{\frac{d}{V}d2g} = \frac{64}{Re} \times \frac{lv^2}{d2g}. \quad (269)$$

Если обозначить $\lambda = \frac{64}{Re_d}$, то

$$h_l = \lambda \frac{lv^2}{d2g}. \quad (270)$$

В формуле (270) безразмерный коэффициент λ называют **коэффициентом гидравлического трения** или **коэффициентом Дарси**.

Поэтому $\lambda \sim 1/Re_d$, индекс d в Re означает, что это число определяется по диаметру трубы.

Формула (270) в виде

$$h_l = \lambda \frac{l}{d} \times \frac{v^2}{2g}$$

называется формулой Дарси-Вейсбаха, и получена ими экспериментально.

Выражение вида

$$\xi_l = \lambda \frac{l}{d} = \lambda \frac{l}{4R}, \quad (271)$$

где R — гидравлический радиус потока ($R = d/4$) выражает коэффициент сопротивления по длине.

3. *Равномерное движение: средняя скорость и расход потока. Формула Шези*

Если в (270) d заменить на гидравлический радиус, то следует

$$v = \sqrt{\frac{8nR}{\lambda} \times \frac{h_l}{l}}. \quad (272)$$

Введем обозначение $c = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$, тогда с учетом того, что $\frac{h_l}{l} = J$, гидравлический уклон

$$v = c\sqrt{RJ}. \quad (273)$$

Эту формулу называют **формулой Шези**.

$$c = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$$

называется коэффициентом Шези.

С учетом полученных результатов формулу (270) можно упростить:

$$h_l = \frac{v^2 l}{c^2 R}. \quad (274)$$

Если коэффициент Дарси λ — величина безразмерная, то коэффициент Шези c имеет размерность

$$[c] = L^{0,5} T^{-1}.$$

Определимся с расходом потока с участием коэффициента Шези:

$$Q = wv = wc\sqrt{RJ}. \quad (275)$$

Преобразуем формулу Шези в следующий вид:

$$v = \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \times \sqrt{gRJ}. \quad (276)$$

Величину $\sqrt{gRJ} = u$ называют динамической скоростью.

Из (276), с учетом $u = \sqrt{gRJ}$, можем получить:

$$\frac{v}{\sqrt{gRJ}} = \frac{v}{u} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}}, \quad (277)$$

для коэффициента Дарси:

$$\lambda = 8 \left(\frac{u}{v} \right)^2. \quad (278)$$

Величина u называется **динамической скоростью**.

4. Гидравлическое подобие. **Основа гидродинамического подобия**

Понятие о подобии. Гидродинамическое моделирование

Выше мы не раз убеждались, что в гидравлике еще множество задач, перед решениями которых математический анализ бессильен. В таких случаях выручают эмпирические исследования проблемы, применение статистических методов.

Для исследования вопросов сооружения гидроэлектростанций применяют метод гидравлических подобий, суть которого состоит в том, что в лабораторных условиях моделируются точно такие же условия, что и в натуре. Это явление называют физическим моделированием.

В связи с тем, что в современной гидравлике ни один НИИ, ни одно КБ не работает без применения ЭВМ, имеет место и численное моделирование. На основе всех видов моделирования находятся общие условия механического подобия, при котором отношение всех линейных размеров, перемещений, кинематических и динамических параметров одинаково. Ясно, что, например, чтобы два потока были подобными, требуется их:

- 1) геометрическое подобие, когда

$$\frac{l_n}{l_m} = M_l, \quad (279)$$

где индексы n , m соответственно означают «натура» и «модель».

Аналогично будут выглядеть взаимоотношения: площадей

$$\frac{w_n}{w_m} = M_w = M_l^2, \quad (280)$$

объемов

$$\frac{W_n}{W_m} = M_W = M_l^3. \quad (281)$$

Однако, отношение

$$\frac{\Delta}{R} = idem, \quad (282)$$

что значит, относительная шероховатость в модели такая же, как и в натуре;

2) кинематическое подобие, когда траектории соответствующих частиц, соответствующие линии тока подобны. Кроме того, если соответствующие части прошли подобные расстояния l_n, l_m , то отношение соответствующих времен движения выглядит следующим образом:

$$\frac{T_n}{T_m} = M_t, \quad (283)$$

где M_t — масштаб времени.

Такое же сходство имеется для скорости (масштаб скорости)

$$\frac{v_n}{v_m} = M \quad (284)$$

и ускорения (масштаб ускорения)

$$\frac{j_n}{j_m} = M_j; \quad (285)$$

3) динамическое подобие, когда требуется, чтобы соответствующие силы были подобными, например, масштаб сил

$$\frac{P_n}{P_m} = M_p. \quad (286)$$

Таким образом, если потоки жидкости механически подобны, то они подобны гидравлически; коэффициенты M_p, M_r, M_v, M_p и прочие называются **масштабными множителями**.

Между масштабными множителями существует определенная связь.

Возьмем, например, последнее выражение

$$\begin{aligned} P_n / P_m &= M_p; \\ P_n &= \rho_n W_n j; \\ P_m &= \rho_m W_m j. \end{aligned} \quad (287)$$

$$\frac{P_n}{P_m} = M_p = \frac{\rho_n \times W_n j}{\rho_m \times W_m j} = M_\rho^0 M_l^3 M_j, \quad (287')$$

подставляя $M_j = M_e M_t^{-2}$, получаем (287), равную

$$M_\rho M_l^4 M_t^{-2},$$

вводим $M_v = M_e M_t^{-1}$,

$$M_\rho M_l^2 M_v^2,$$

разделив обе части на правую, имеем:

$$M_\rho M_\rho^{-2} M_l^{-2} M_t^{-2} = 1. \quad (288)$$

Полученное выражение называется законом подобия Ньютона в масштабных множителях.

Если в (288) множители заменить на их отношения, то

$$\frac{P_n}{\rho_n l_n^2 \frac{2}{n}} = \frac{P_m}{\rho_m l_m^2 \frac{2}{m}}. \quad (289)$$

Формулу (289) часто пишут в виде:

$$Ne_n = \frac{P_n}{\rho_n l_n^2 \frac{2}{n}} = \frac{P_m}{\rho_m l_m^2 \frac{2}{m}},$$

после всего получаем критерий Ньютона

$$Ne_n = N_m. \quad (290)$$

Критерий Ньютона является необходимым и достаточным условием гидродинамического подобия. Как видно, уравнение (288) очень удобно при решении определенных задач: зная отношение масштабных множителей, можно восстановить отношения между параметрами, и наоборот.

Критерии гидродинамического подобия

Как известно, движение жидкости происходит под воздействием сил тяжести, давления, трения, поверхностного напряжения, упругости.

Условия гидродинамического подобия требуют равенства всех сил, но это практически не удается. По этой причине, подобие устанавливают по какой-нибудь из этих сил, которая в данном случае преобладает. Кроме того, требуется выполнение условий однозначности, которые включают в себя пограничные условия потока, основные физические характеристики и начальные условия.

Рассмотрим два частных случая:

1) преобладает влияние сил тяжести, например, при течении через отверстия или водосливы

$$P = \rho g W. \quad (291)$$

Если перейти к взаимоотношению P_n и P_m и выразить его в масштабных множителях, то

$$M_p = \frac{P_n}{P_m} = M_0 M_l^3 M_g. \quad (292)$$

Разделив (292) на (287'), после необходимого преобразования, следует

$$M^2 M_g^{-1} M_l^{-1} = 1. \quad (293)$$

Если теперь совершить переход от масштабных множителей к самим отношениям, то с учетом того, что l — характерный размер живого сечения, то

$$v_n^2 (g_n l_n^2) = \frac{v_m^2}{g_m l_m^2}. \quad (294)$$

В (294) комплекс v^2/gl называется **критерием Фруди**, который формулируется так: потоки, в которых преобладают силы тяжести, геометрически подобны, если

$$\frac{Fr_n}{Fr_m} = 1 \text{ или } Fr = idem; \quad (295)$$

2) преобладает влияние сил сопротивления. Примерами этому случаю могут служить движения жидкости в реках, трубопроводах, каналах. Силы сопротивления в общем виде могут быть представлены так:

$$T = \tau_0 \chi l = \rho g R J \chi l, \quad (296)$$

поскольку $R\chi = w$, то $= \rho g w l$, где τ_0 — касательное напряжение на стенках, χ — смоченный периметр, l — длина рассматриваемого участка русла, J — гидравлический уклон.

Если учтем, что $M_w = M_j^2$, и применим формулу (287') для силы трения, то

$$1 = M_v M_1^{-1} M_g^{-1} M_\rho^{-1}, \quad (297)$$

поскольку $J = \frac{v^2}{c^2 R} = \frac{v^2 \lambda}{8gR}$, то

$$M_j = M_v^2 M_c^{-2} M_R^{-1} = M_v^2 M_\lambda M_g^{-1} M_R^{-1}, \quad (298)$$

приравняв (297) и (298) по M_j , и предположив, что $M_R = M_P$ (при геометрическом подобии), заключаем, что

$$M_\lambda = 1 \text{ или } M_e = 1, \quad (299)$$

то есть

$$\lambda = idem \text{ и } c = idem,$$

тогда

$$\lambda_n = \lambda_m \text{ и } c_n = c_m. \quad (300)$$

Это второе условие гидродинамического подобия.

Нами получены три критерия гидродинамического подобия:

1. Критерий Ньютона (общие критерии).
2. Критерий Фруда.
3. Критерий Дарси.

Отметим только: в частных случаях гидродинамическое подобие может быть установлено также по

$$\left(\frac{\Delta}{R}\right)_H = \left(\frac{\Delta}{R}\right)_M, \quad J_M = J_H,$$

где Δ — абсолютная шероховатость;

R — гидравлический радиус;

J — гидравлический уклон.

5. Распределение касательных напряжений при равномерном движении

Пусть имеем наклонную трубу, у которой r_0 — ее радиус, w — площадь живого сечения, χ — смоченный периметр (рис. 2).

Требуется: составить уравнение равномерного движения в этой трубе и определиться с распределением касательных напряжений. Выделим два сечения: 1—1 и на расстоянии от него 2—2.

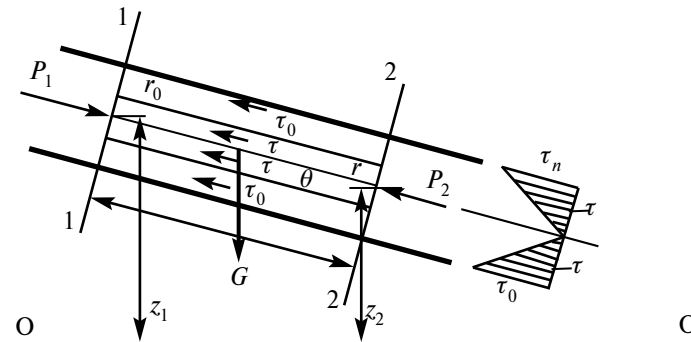


Рис. 2. Распределение касательных напряжений сил при равномерном движении потока

Какие силы действуют на массу жидкости на выделенном участке? Перечислим эти силы:

- 1) P — равнодействующая сила давления в сечениях 1—1 и 2—2;
- 2) T — равнодействующая сила трения, действующих на боковой поверхности отрезка;
- 3) G — вес жидкости в рассматриваемом объеме трубы: в данном случае, $G = G\cos\theta$, поскольку труба находится в наклонном положении к горизонту под углом θ . Поскольку движение равномерное, то сумма проекций на направление движения должна быть равна нулю, то есть

$$P - T + G\cos\theta. \quad (301)$$

Перепишем (62), перейдя к численным значениям действующих сил:

$$(P_1 - P_2)w - \tau_0\chi l + \rho g w l \cos\theta = 0, \quad (302)$$

в этой формуле $P_1 P_2$ — соответствующие давления в сечениях 1—1 и 2—2, $w = w_1 = w_2$ — торцевые сечения в 1—1, 2—2 в центрах, $t_1 t_2$ — высота от плоскости сравнения центров тяжести этих сечений.

С учетом $l\cos\theta = t_1 - t_2$ разделим (302) на $\rho g w$: после небольшого преобразования следует

$$t_1 - t_2 + \frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{\tau_0\chi l}{\rho g w}. \quad (303)$$

Перегруппировав члены,

$$\left(t_1 + \frac{P_1}{\rho g}\right) - \left(t_2 + \frac{P_2}{\rho g}\right) = \frac{\tau_0\chi l}{\rho g w}. \quad (304)$$

Но с другой стороны, при равномерном движении левая часть уравнения (304) есть потеря напора на длине lh_p , таким образом:

$$h_p = \frac{\tau_0\chi l}{\rho g w}, \quad (305)$$

откуда

$$\tau_0 = \rho g \frac{w}{\chi} \times \frac{h_l}{l}. \quad (306)$$

Получим искомую формулу, которую остается анализировать.

Формулу (306) можно записать в других формулах, поскольку $w/\chi = R$; $h/l = J$.

Поэтому (307), (308):

$$\tau_0 = \rho g R J, \quad (307)$$

$$\tau_0 = \rho g \frac{r_0}{2} J. \quad (308)$$

(309) равносильно (306), если (306) разделим на ρ , то получим

$$\frac{\tau_0}{\rho} = g R J = u^2, \quad (309)$$

как следует из (277), поскольку $u = \sqrt{g R J}$, где u — динамическая скорость.

Теперь остается определить, исходя из полученных результатов для τ_0 , распределения касательного напряжения τ в произвольно выбранной точке выделенного объема.

Например, выделим точку (любую), отстоящую от стенки на расстоянии $r_0 - r = t$. Пусть эта точка находится на поверхности виртуального цилиндра с радиусом r ($r < r_0$). В таком случае, переписав (308) в виде

$$\tau = \rho g \frac{r}{2} J, \quad (310)$$

тем самым вводим касательное напряжение τ на поверхности цилиндра, действующее на точку в $r_0 - r = t$.

Из сравнений (310) и (308) следует:

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{r}{r_0},$$

поэтому

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{r_0}. \quad (311)$$

Подставив $r = r_0 - t$ в (311), получим

$$\tau = \tau_0 \frac{r_0 - t}{r_0}, \quad (312)$$

Выводы:

1) при равномерном движении распределение касательного напряжения по радиусу трубы подчиняется линейному закону;

2) на стенке трубы касательное напряжение максимально (когда $r_0 = r$, т. е. $t = 0$), на оси трубы оно равно нулю (когда $r_0 = t$).

Не можем ли мы теперь рассмотреть потери напора с точки зрения распределения касательного напряжения τ ?

Можем.

Как видно из (309), $u^2 = \tau_0 / \rho$. Подставим сюда u^2 из формулы

(39). Тогда $\frac{1}{8} \lambda u^2 = \frac{\tau_0}{\rho}$, откуда

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \rho u^2. \quad (313)$$

Определив из (313) λ и подставив в (270) с учетом, что $d = 4R$, где d — диаметр трубы, R — гидравлический радиус трубы, получим, что

$$h_l = \frac{\tau_0 l}{\rho g R}, \quad (314)$$

тем самым мы определили потери напора на длине l при заданных l, g, ρ, R через касательное напряжение.

ЛЕКЦИЯ № 9. Вопросы потери напора

1. Ламинарное движение

Распределение местных скоростей при ламинарном движении

Как распределяются остальные скорости? Например, местные скорости?

Во-первых, не мешает нам снова вспомнить о характерных свойствах ламинарного движения: главное отличие его от турбулентного в том, что местные скорости не изменяются во времени.

При равномерном движении ламинарный поток движется асимметрично, то есть поток симметричен относительно своей оси и радиус любой точки перпендикулярен оси сечения потока.

Если рассматривать это движение в системе координат (χ, η) , что является наиболее удобным, то

$$u = u; u_r = 0,$$

поскольку ось O_χ сонаправлена с направлением движения потока.

Двигается как будто бесконечно концентрические, тонкие цилиндрические слои, как одна система: эти слои перемещаются в отношении друг друга.

Между этими слоями, поскольку почти все жидкости ньютоновы, возникают касательные напряжения, с распределением которых разобрались в предыдущих лекциях.

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr}, \quad (315)$$

где μ — динамическая вязкость;

u — местная скорость;

r — радиус трубы.

Там же, в прошлой лекции, убедились, что по мере удаления от оси к стенке трубки, то есть с ростом r , местная скорость u уменьшается, то есть градиент скорости $du/dr < 0$. Потому-то в формуле (315) знак минус — чтобы τ осталась положительной, так как она — величина положительная.

В формуле (310) нами получено другое выражение для касательной τ . После приравнения ее к (315) и после некоторых несложных распределений-преобразований (приводим без вывода), получим формулу для местной скорости u , которую имеет произвольная точка живого сечения, находящегося на расстоянии r от оси потока (трубы):

$$u = \frac{gJ}{4V}(r_0^2 - r^2), \quad (316)$$

в которой r_0 — радиус трубы;

J — гидравлический уклон потока;

V — кинематическая вязкость.

Полученное уравнение (316) является уравнением параболы. Если оценить u_{\max} , то очевидно, что этот максимум имеет место на оси потока, где $r = 0$, то есть

$$u_{\max} = \frac{gJ}{4V}r_0^2. \quad (317)$$

Выводы:

- 1) при ламинарном (равномерном) движении распределение местных скоростей подчиняется параболическому закону;
- 2) на стенке трубы местная скорость равна нулю, она максимальна на оси потока, когда $r = 0$ (для точки), то есть $r_0^2 - r^2 = r_0^2$ (r_0 — радиус трубы).

Как видно из сравнения выводов для распределений τ и u , речь идет о превращении энергии потока, которая тратится на преодо-

ние сопротивлений в жидкости, поэтому там, где τ_{\max} , имеет место u_{\min} , и наоборот.

Расход потока

С этим понятием мы встречались, и воспользовались им не один раз: речь идет о количестве жидкости, которое проходит через рассматриваемое сечение за единицу времени.

Попробуем сформировать произвольное сечение и определить расход потока через это сечение. На произвольном поперечном сечении трубы выберем площадку dw в виде кольца толщиной dr на расстоянии r от оси потока: стороны этого кольца — концентрические окружности, у которых радиусы соответственно равны r и $r + dr$. Если оценить площадь этого элементарного слоя, то

$$dw = 2\pi r dr. \quad (318)$$

Что касается расхода потока через это сечение, то он определяется еще с местной скоростью u , то есть

$$dQ = u dw. \quad (319)$$

Найдем полный расход по трубе:

$$Q = \int_0^{r_0} u dw = 2\pi \int_0^{r_0} u r dr. \quad (320)$$

Поскольку по формулам (316) и (317) можно выразить местную скорость и через ее максимальное значение u_{\max} , то

$$u = u_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]. \quad (321)$$

Подставив (321) в (320), получим (еще учтем, что V не зависит от r):

$$Q = \frac{2\pi u_{\max}}{r_0^2} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) r dr = \frac{\pi r_0^2}{2} u_{\max}. \quad (322)$$

После преобразований типа $r_0^2 = \frac{d^2}{4}$ и замены u_{\max} на (317), получим:

$$Q = \frac{\pi g J}{128 V} d^4. \quad (323)$$

Как видно из формулы, если гидравлический уклон задан, то расход потока с увеличением диаметра трубы заметен при значительном увеличении этого диаметра, о чем свидетельствует четвертая степень d , то есть Q пропорциональна четвертой степени диаметра трубы.

Средняя скорость

Задача — найти выражение, где можно было бы выразить среднюю скорость через местную. Для этого пользуемся выражением

$$v = \frac{Q}{w}. \quad (324)$$

С учетом того, что $w = 2\pi r_0^2$ (речь идет о полном поперечном сечении трубы с радиусом r_0), и формулы (323) в (324), получим:

$$v = \frac{gJ}{32V} d^2 = \frac{gJ}{8V} r_0^2. \quad (325)$$

Чтобы получить формулу (85), требуется представить $w = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}$; после этого w и Q из (323) подставить в (324). После сокращений получается (85).

Из сравнений формул (325) и (317), аналогия которых очевидна, нетрудно заключить, что

$$v = \frac{u_{\max}}{2}, \quad (326)$$

таким образом, в круглом сечении ламинарного потока средняя скорость потока равна половине максимального значения местной скорости, причем градиент $du/dr < 0$.

Изменение касательных напряжений, которые максимальны на оси потока, происходит наоборот: увеличивается на r по движению к стенкам трубы.

Нам не только удалось определить распределение местных скоростей, но и выразить расход и среднюю скорость потока через максимальное значение местной скорости.

Коэффициент Дарси при ламинарном напорном движении

Задача следующая: выяснить, как ведет себя коэффициент Дарси λ при рассматриваемом движении и в каких отношениях потери напора находятся со средней и местной скоростями.

Для этого достаточно найти формулу, связывающую коэффициент Дарси (λ), потерю напора на длине $l(h)$, среднюю скорость потока (v), максимальное значение местной скорости (u_{\max}).

По определению, гидравлический уклон

$$J = \frac{h_l}{l},$$

с другой стороны, из формулы (85)

$$J = \frac{32vV}{gd^2}.$$

Приравнивая эти формулы, определяем, что

$$h_l = \frac{32vl}{gd^2}V. \quad (327)$$

С другой стороны, возвращаясь к формуле (271), заключаем (приравнявая (271) к (327)), что

$$\frac{\lambda v^2}{d2g} = \frac{32V}{gd^2},$$

откуда, после сокращений подобных:

$$\lambda = \frac{64V}{vd}, \quad (328)$$

где комплекс V/vd — число Рейнольдса Re , поэтому

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \quad (329)$$

Возвращаясь к формуле (327), заключаем, что потери напора в ламинарном равномерном круглом сечении $h_f \sim v$ (средней скорости), причем средней скорости не в квадрате, а в первой степени.

Что касается коэффициента Дарси, то он обратно пропорционален той же средней скорости, и тоже в первой степени. Это следует из формул (328) и (329): в последней v содержится в числе Рейнольдса Re . Следует отметить, что числитель формулы (329) имеет разные значения в зависимости от формы сечения потока, поэтому формулу для коэффициента Дарси приводят в виде

$$\lambda = \frac{A}{Re},$$

где A — некоторый коэффициент, который определяется по таблице в зависимости от формы сечения, например, трубопровода.

В заключение остается отметить, что местная скорость в виде u_{\max} содержится в средней скорости, поскольку

$$v = 0,5u_{\max},$$

согласно формулы (86).

2. Турбулентный равномерный режим движения потока

Напомним сначала, что основная черта турбулентного движения — это изменение местных скоростей по времени. Поэтому раньше, когда говорили о турбулентном движении, оперировали усредненными скоростями $\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z$

Логарифмический закон распределения усредненных скоростей

Если рассмотреть плоское движение (т. е. потенциальное движение, когда траектории всех частиц параллельны одной и той же плоскости и являются функцией двух координат, а если движение неустановившееся, то и времени t), одновременно являющееся равномерным турбулентным в системе координат XYZ , когда линии тока параллельны оси O_x , то

$$\bar{u}_x = \bar{u}_x(t); \bar{u}_y = 0; \bar{u}_z = 0, \quad (330)$$

где t — расстояние данной точки по нормали к стенке.

Касательное напряжение было определено нами как

$$\tau = M \frac{du_x}{dt} + \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dt} \right)^2. \quad (331)$$

Кроме того, было подчеркнуто, что при сильной интенсивности турбулентности первым членом в (331) можно пренебречь: точно так же, когда движение стремилось к ламинарности, можно было пренебречь вторым слагаемым. Пусть теперь движение таково, что придется пренебречь первым слагаемым, то есть движение сильно турбулировано:

$$\tau = \tau_{турб} = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dt} \right)^2. \quad (332)$$

Теперь задачей является определение величины l , то есть длины пути перемешивания частиц потока при турбулентном движении.

Для определения l нет какой-нибудь теоретической раскладки. Поэтому, для его определения у разных исследователей существуют разные точки зрения.

Не углубляясь в историю, остановим выбор на формуле А. А. Сагкевича для трубы

$$l = \chi z \sqrt{1 - t/r_0}, \quad (333)$$

где χ — некоторый коэффициент.

Для того, чтобы получить формулу для общего случая, будем считать, что в (332) \bar{u}_x , в дальнейшем u , то есть

$$\tau_{турб} = \rho t^2 \left(\frac{du}{dt} \right)^2. \quad (334)$$

Подставив в (334) l по (333) с учетом (312) в виде $\tau = \tau_0(1 - t/r_0)$, получим:

$$\tau_{0турб} = \rho \chi^2 t^2 \left(\frac{du}{dt} \right)^2. \quad (335)$$

Однако, согласно формуле (309), $\tau_0/\rho = u^2$ (динамическая скорость).

Поэтому, $u^2 = \chi^2 t^2 (du/dt)^2$, откуда $u = \chi t (du/dt)$, откуда следует

$$du = \frac{u}{\chi} \times \frac{dt}{t}. \quad (336)$$

Очевидно, что интегрирование функций вида dt/t приводит к логарифму, то есть, интегрируя (336), получим (поскольку u/χ не зависит от t):

$$u = \frac{u}{\chi} \ln t + \text{const}. \quad (337)$$

Получили искомое выражение: логарифмический закон распределения скоростей для турбулентного движения.

Этот закон хорошо утверждается практикой; однако по мере удаления от оси потока его соответствие практике уменьшается в силу роста пристеночных вязких сил.

Распределение осредненных скоростей и коэффициента Дарси

Нам осталось рассмотреть эти вопросы вблизи подвязкого слоя и в самом слое. Для этого нам придется провести четкий водораздел между этими слоями потока. Движение по-прежнему турбулентное.

Снова возвращаясь к структуре турбулентного потока, отметим, что при напорном движении поток состоит в основном из пяти областей:

- 1) ламинарная: приосевая область, где местная скорость максимальна, в этой области $\lambda_{\text{лам}} = f(Re)$, где число Рейнольдса $Re < 2300$;
- 2) во второй области поток начинает переходить из ламинарного в турбулентный, следовательно, увеличивается и число Re ;
- 3) здесь поток полностью турбулентный; в этой области трубы называются **гидравлическими гладкими** (шероховатость Δ меньше, чем толщина вязкого слоя δ_v , то есть $\Delta < \delta_v$).

В случае, когда $\Delta > \delta_v$, труба считается «гидравлически шероховатой».

Характерно, что если для $\lambda_{\text{лам}} = f(Re^{-1})$, то в этом случае $\lambda_{\text{гд}} = f(Re^{-0,25})$;

- 4) эта область находится на пути перехода потока к подвязкому слою: в этой области $\lambda_{\text{лам}} = (Re, \Delta/r_0)$. Как видно, коэффициент Дарси уже начинает зависеть от абсолютной шероховатости Δ ;
- 5) эта область называется **квадратичной областью** (коэффициент Дарси не зависит от числа Рейнольдса, но определяется почти полностью касательным напряжением) и является пристенной.

Поэтому вклад местных скоростей в коэффициенте Дарси настолько мал, что его можно заметить, если только рассмотреть скорость в квадрате, а не в первой степени. Эту область по той же причине называют **автомодельной**, то есть не зависящей от Re .

В ней коэффициент Дарси уже не определяется числом Рейнольдса и является функцией только абсолютной шероховатости $\lambda_{\text{кв}} = f(\Delta, r_0)$.

Как нетрудно догадаться, продолжая излагать теорию закономерностей турбулентного потока, мы находимся в третьей области.

Гидравлически гладкая труба

Само собой разумеется, мы должны получить выражения, которые описывали бы поведение осредненных скоростей и коэффициента Дарси в третьей области турбулентного потока.

По логарифмическому закону распределения скоростей в турбулентном потоке (ее мы вывели для общего случая) (формула (97)),

$$u = \frac{u}{\chi} \ln t + \text{const.}$$

Сначала определим константу $\text{const} = c$.

Если применить формулу (337) к некоторой точке, которая находится на границе четвертой и пятой областей, то есть на внешней границе вязкого подслоя, в случае $t = \delta_\sigma$. Тогда местная скорость этой точки

$$u_\sigma = Nu, \quad (338)$$

где N — некоторое число;

u — динамическая скорость.

С учетом (338), формулу (337) представляем в виде:

$$u_\sigma = \frac{u}{\chi} \ln \delta_\sigma + c, \quad (339)$$

откуда с учетом того, что по определению

$$\delta_\sigma = \frac{NV}{u}, \quad (340)$$

где V — кинематическая вязкость, а также с учетом формулы (338), (99), находим константу c :

$$c = Nu - \frac{u}{\chi} \ln \frac{NV}{u}, \quad (341)$$

преобразуя, получим:

$$c = u \left(N - \frac{1}{\chi} \ln N \right) - \frac{u}{\chi} \ln \frac{V}{u}.$$

Подставим (341) в (339), разделив получившееся выражение на u , при $\chi = 0,4$; $N = 11,6$ (такие значения существуют для гладких труб: получены экспериментально) получим:

$$\frac{u}{u} = 5,751g \frac{ut}{V} + 5,5. \quad (342)$$

Для коэффициента Дарси формулу приводим в виде:

$$\lambda_{2l} = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}, \quad (343)$$

где $Re = vd/V$ — местная скорость, u или u содержатся в средней скорости потока v .

Гидравлически шероховатая труба. Шероховатая область

Рассматриваем четвертую область турбулентного потока.

В этой области роль местных скоростей еще больше убывает, зато растет роль касательных напряжений. Тем не менее, между u_{Δ} (местная скорость точки на уровне выступа шероховатости Δ) и u (динамическая скорость) сохраняется некоторая пропорциональность β . То есть

$$u_{\Delta} = \beta u. \quad (344)$$

Для этой же точки уравнение (337) выглядит следующим образом:

$$u = \frac{u}{\chi} \ln t + u_{\Delta} - \frac{u}{\chi} \ln \Delta = \frac{u}{\chi} \ln \frac{t}{\Delta} + u_{\Delta}. \quad (345)$$

Подставим (344) в (345). Из этого следует:

$$u = \frac{u}{\chi} \ln \frac{t}{\Delta} + \beta u. \quad (346)$$

Разделив (346) на u , получим окончательную формулу для осредненной скорости в шероховатой области, которую выразим через относительную местную скорость u/u :

$$\frac{u}{u} = \frac{1}{\chi} \ln \frac{t}{\Delta} + \beta, \quad (347)$$

где β — коэффициент пропорциональности в (344).

Можно перейти в десятичный логарифм, как в (342), при $\chi = 0,4$, получим:

$$\frac{u}{u} = 5,75 \lg \frac{t}{\Delta} + \beta. \quad (348)$$

Относительная максимальная скорость u_{\max}/u достигается при $t = r_0$.

Что касается коэффициента Дарси, то для квадратичной области

$$\lambda_{кв} = \frac{1}{a \lg \left(\frac{AR}{\Delta} \right)^2}, \quad (349)$$

где R — гидравлический радиус;

A — параметр, отражающий особенности конкретного вида шероховатости, $a = 2,3 / \chi \sqrt{8}$. Для λ существуют и другие формулы.

3. Коэффициент Шези в «квадратичной области». **Формула Павловского**

В общем случае, как известно, коэффициент Шези $c = \sqrt{8g/\lambda}$. Поэтому из всех пяти областей турбулентного потока заслуживает внимания рассмотрение его в «квадратичной области», где по-

является особое, как убедились выше, поведение местных скоростей и коэффициента Дарси.

По этому поводу существует множество формул. Наиболее интересной из них является формула Павловского

$$c = \frac{1}{n} R^y, \quad (350)$$

где n — коэффициент шероховатости;

R — гидравлический радиус.

Как найти степень y ?

Формула (350) получена эмпирически. По Павловскому, при $0,1 \leq R \leq 3$ м

$$y = 2,5\sqrt{n} - 0,13 - 0,75\sqrt{R}(\sqrt{n} - 0,1), \quad (351)$$

причем при $R < 1$ м, $y \approx 1,5\sqrt{n}$, при $R > 1$ м, $y \approx 1,3\sqrt{n}$.

Существуют и другие формулы для коэффициента Шези, например, формула Агроскина—Штереплихта.

$$c = c_1 + B \lg R, \quad (352)$$

где $c_1 = 1/n$, $B = 27,5 - 300n$.

4. Неравномерное движение

В практике очень много случаев, когда из-за изменения геометрии потока изменяются такие его кинематические параметры, как вектор средней скорости, средняя скорость и т. д.

В конечном счете, изменение геометрии потока приводит к изменению такого важнейшего параметра, как площадь его сечения w , следовательно, формулы, которые мы получили для равномерного движения, уже другие, поскольку из-за изменения кинематики движения, из-за того, что движение становится неравномерным, изменяются также динамические параметры потока.

Это значит, что мы должны скорректировать или пересмотреть (когда требуется) ранее полученные результаты, связанные с потерей удельной энергии для равномерного движения. Такова задача настоящей, десятой по счету лекции.

Несмотря на свою кажущуюся простоту, движение потока жидкости — настолько сложное явление, что, несмотря на относительно давнюю историю, до сих пор не изучено достаточно. Как, например, мы уже убедились, до сих пор не найден математический аппарат анализа многих явлений, и придется для их описания воспользоваться методами статистического анализа. Надеемся, что кому-то из вас удастся решить хотя бы небольшую часть этих проблем теории гидравлики, например, такой вопрос: при достижении определенной степени турбулентности жидкость может «оторваться» от стенки трубы — как описать такое «поведение» потока математическим анализом.

Общий подход к проблеме неравномерности потока

Еще в лекции № 8, рассматривая вопросы потери напора в общем виде, мы отметили, что при равномерном движении потери напора, как правило, выражаются формулой

$$h_{np} = \xi v^2 / 2g, \quad (353)$$

где потери напора h_{np} зависят от скорости потока; она постоянна, поскольку, движение равномерное. Что касается коэффициента сопротивления ξ , то его физический смысл в следующем: этот коэффициент является показателем соответствия определенного значения h_{np} некоторому количеству скоростных напоров. Другими словами, он устанавливает соответствие между h_{np} и v потока.

Однако потери возникают по длине h_f ; по местным сопротивлениям h_m .

Следовательно, и формула (353) имеет соответствующие формы. Действительно, если в первом случае

$$h_f = \frac{\xi_l v^2}{2g}, \quad (354)$$

то во втором случае

$$h_m = \frac{\xi_m v^2}{2g}. \quad (355)$$

Как видно, формулы (354) и (355) различаются только коэффициентом сопротивления ξ .

В настоящей лекции, в основном, будем заниматься экспериментальным определением ξ_m ; тем самым проблема неравномерного потока для определения потери напора h_{np} во многом будет решена.

Формула (355) называется **формулой Вейсбаха**. В обеих формулах, как и в (353), коэффициент сопротивления — величина безразмерная, и в практических целях определяется, как правило, по таблицам.

Эти табличные данные также получены экспериментально. Допустим, перед нами прямо здесь и сейчас поставлена задача: определить коэффициент местного сопротивления ξ_m .

Для проведения опыта по определению ξ_m последовательность действий следующая:

1) должен быть обеспечен ход равномерности потока в исследуемом конструктивном элементе: например, надо заботиться о том, чтобы исследуемый конструктивный элемент был на достаточном удалении от входа в трубопровод, а также от предшествующего другого конструктивного элемента.

Другими словами, сечение, где будут устанавливаться пьезометры для измерения входного напора в конструктивный элемент, должны находиться в участке потока. Поэтому их установление непосредственно у входа исследуемого конструктивного элемента приведет к искаженным результатам. Следовательно, необходимо обеспечить достаточное удаление от входа;

2) для установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости между двумя сечениями (в нашем случае, это вход с $x_1 v_1$ и выход с $x_2 v_2$), движение в которых плавно изменяющееся, запишем уравнение Бернулли:

$$t_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{x_1 v_1^2}{2g} = t_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{x_2 v_2^2}{2g} + h_{np}, \quad (356)$$

где t_1, t_2 — высоты центров тяжести рассматриваемых сечений над плоскостью сравнения;

p_1, p_2 — соответствующие сечениям давления в рассматриваемых точках;

x_1, x_2 — соответствующие коэффициенты кинетической энергии при скоростях:

v_1 на сечении 1—1 и v_2 на сечении 2—2.

По условиям получения этого уравнения требовалось, чтобы в рассматриваемых сечениях поток был плавно изменяющимся. Между сечениями могло бы произойти что угодно.

Этот момент дает нам право на его применение. Именно этим моментом продиктовано требуемое удаление пьезометров от входа в конструктивный элемент.

На этом этапе определяем перепад пьезометрических напоров ΔH по формуле (356) при условии, что $x_1 = x_2, v_1 = v_2$, т. е. после прохождения через конструктивный элемент восстановился тот же поток; разумеется, сечения 1—1 и 2—2 находятся на достаточном удалении от исследуемого конструктивного элемента:

$$\Delta H_n = h_{np} = \left(t_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(t_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) \quad (357)$$

Поскольку суммарные потери напора

$$h_{np} = h_l + h_m, \quad (358)$$

где h_l, h_m (см. формулы (354), (355)), то находим потери напора на этом же участке уже без конструктивного элемента, путем простого измерения напоров пьезометрическими приборами;

3) по формуле (358) находим, что $h_m = h_{np} - h_l$, после этого по формуле (355) находим искомый коэффициент сопротивления

$$\xi_m = h_m \left(\frac{v_2}{2g} \right)^{-1}.$$

Однако может получиться, что $v_1 \neq v_2$, следовательно $x_1 \neq x_2$.

В этом случае местные потери напора h_m находят по формуле (356).

В заключение несколько слов о взаимоотношениях между ξ_m и Re — числом Рейнольдса. Все определяется геометрией потока. Как и коэффициент Дарси λ , ξ_m также является некоторой функцией от Re , если $Re < 5(10^8 \times 10^4)$, поскольку с уменьшением Re ξ_m растет. При $Re < 5(10^3 \times 10^4)$ такой зависимости практически не существует.

Еще один момент. Поскольку ξ_m в общем-то является сложной функцией вида

$$\xi_m = f\left(Re, \frac{\Delta}{d}, Ka\right), \quad (359)$$

где Δ — абсолютная шероховатость трубы;

d — диаметр трубы;

Ka — некоторое число, которое лучше представить как

$$\xi_m = \xi_{m.кв} + \frac{A}{Re}, \quad (360)$$

где $\xi_{m.кв}$ — коэффициент местного сопротивления в «квадратичной области»;

A — некоторый коэффициент, который как и $\xi_{m.кв}$, определяется по табличным данным.

Если число Рейнольдса достаточно большое, то из-за того, что уже практически не зависит от него,

$$\xi_{m.кв} \gg \frac{A}{Re}, \quad (361)$$

поэтому, при $Re < 5(10^3 \times 10^4)$, слагаемым A/Re можно пренебречь.

Местные сопротивления

Во-первых, разберемся с тем, что происходит после того, как поток вошел с некоторым напором и скоростью в трубопровод.

Это зависит от вида движения: если поток ламинарный, то есть его движение описывается линейным законом, тогда его кривая — парабола. Потери напора при таком движении достигают $(0,2 \times 0,4) \times (v^2/2g)$. При турбулентном движении, когда оно описывается логарифмической функцией, потери напора — $(0,1 \times 1,5)(v^2/2g)$.

После таких потерь напора движение потока стабилизируется, то есть восстанавливается ламинарный или турбулентный поток, каким и был входной.

Участок, на котором происходят вышеуказанные потери напора, восстанавливается по характеру, прежнее движение называется начальным участком.

Во-вторых, теперь можем количественно оценить длину начального участка $l_{нач}$. Приведенные формулы, как и большинство формул практической гидравлики, получены экспериментально: для турбулентного движения

$$\frac{l_{нач}}{d} = 0,52\lambda, \quad (362)$$

где λ — коэффициент Дарси;

d — диаметр трубы;

для ламинарного движения, поскольку $\lambda = 64/Re$,

$$\frac{l_{нач}}{d} = 2,56\lambda. \quad (363)$$

Сравнивая формулы (362) и (363), нетрудно заключить: турбулентный поток восстанавливается в 5 раз быстрее, чем ламинарный, при одних и тех же гидравлических сопутствующих данных.

В третьих, рассмотрим частный случай, когда поток не сужается, как рассмотрели выше, но внезапно расширяется. Почему происходят потери напора при такой геометрии потока?

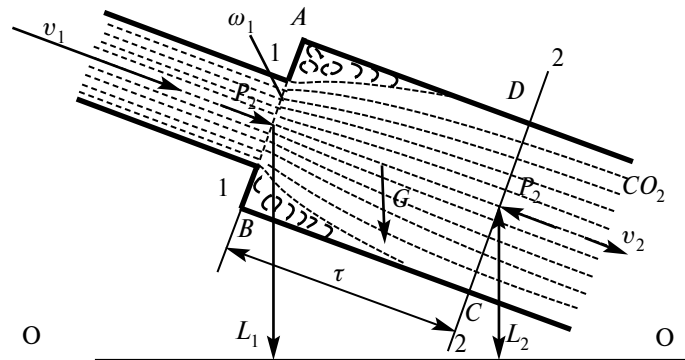


Рис. 3. Силы, возникающие в потоке при внезапном расширении

Из рисунка 3 видно, что после выхода из узкой трубы, через некоторое расстояние поток заполняет трубу, но уже широкую, с площадью сечения 2—2 w_2 . Однако, начиная сразу после сечения 1—1 до сечения 2—2, у стенки трубы формируется пристеночный водоворот, который к 2—2 сужается и переходит в поток. Участок потока между сечениями 1—1 и 2—2 без водоворотной области называют транзитной струей. Назовем участок потока 1—1/2—2 также начальным участком.

На этом участке на границе раздела транзитной струи с водоворотной областью касательные напряжения более значительны, чем при равномерном движении.

Формирующиеся вихреобразные массы жидкости, проникая через границы транзитной струи в поток, гасятся в нем, поскольку образуют внутри потоковые силы трения. Поэтому происходят потери напора при внезапном расширении потока $h_{e,p}$.

Попробуем определить коэффициенты местных сопротивлений: к счастью, в рассматриваемом случае удастся их определить аналитически.

Сначала приведем уравнение Бернулли для сечений 1—1 и 2—2:

$$h_{e,p} = t_1 - t_2 + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{x_1 v_1^2}{2g} - \frac{x_2 v_2^2}{2g}. \quad (364)$$

Однако, здесь требуется выразить высоту центров тяжести обоих сечений t_1, t_2 от плоскости сравнений, а также величины ρ, p_1, p_2 через соответствующие скорости потока v_1, v_2 .

Для этого нужно применять к массе жидкости между сечениями 1—1 с площадью w_1 и 2—2 с площадью w_2 теорему о количестве движения.

По этой теореме, сумма проекций на ось движения внешних сил, которые действуют на движущуюся систему, есть изменение количества движения. Как будет выглядеть аналитическая запись этой теоремы в нашем случае? Исходя из рисунка, запишем силы, которые действуют на систему:

- 1) $p_1 w_1$ — действуют сразу после расширения, сила давления на сечении 1—1;
- 2) $R = p_1(w_2 - w_1)$ — действуют сразу после сечения 1—1; этой силой кольцевая стенка площадью $w_2 - w_1$ действует на поток;
- 3) $R_2 = p_2 w_2$ — сила давления на сечении 2—2, которая направлена против течения.

Кроме этих сил, имеют место проекции сил трения на боковые стенки трубы между 1—1 и 2—2; однако ими пренебрегают из-за их незначительности, так как расстояние между 1—1 и 2—2 небольшое.

Кроме вышеуказанных сил, действует еще сила тяжести G , проекция которой есть

$$G \cos \theta = \rho g w_2 l \cos \theta = \rho g w_2 (t_1 - t_2). \quad (365)$$

Если суммировать все вышеперечисленные силы, то получим выражение

$$\begin{aligned} p_1 w_1 + p_1 (w_2 - w_1) + p_2 w_2 + \rho g w_2 (t_1 - t_2) = \\ = (p_1 - p_2) w_2 + \rho g w_2 (t_1 - t_2). \end{aligned} \quad (366)$$

С другой стороны, воспользуемся выражением

$$\int_w u^2 dw = \alpha' v^2 w, \quad (367)$$

где α — коэффициент количественного движения (или коэффициент Буссинеска);
 u — местная скорость;
 v — средняя скорость потока;
 w — площадь сечения потока.

Применение формулы (367) к нашей системе позволяет получить другое выражение для той же массы между сечениями 1—1 и 2—2, заменив w на $w = \rho Q$, получим:

$$\rho Q(x'_2 v_2 - x'_1 v_1) = \rho w_2 v_2 (x'_2 v_2 - x'_1 v_1), \quad (368)$$

здесь мы учли, что на сечении 2—2 расход потока $Q = w_2 v_2$.

Поскольку (366) и (368) есть приращение количества движения одной и той же массы, то приравняв их, получим:

$$(p_1 - p_2)w_2 + \rho g w_2 (t_1 - t_2) = v w_2 v_2 (x'_2 v_2 - x'_1 v_1). \quad (369)$$

При $x'_1 = x'_2 = x'$, сократим w_2 и делим все члены на ρg , из чего следует:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + (t_1 - t_2) = \frac{x' v_2}{g} (v^2 - v_1). \quad (370)$$

Левая часть уравнения (370) есть сумма первых двух членов (364), подставив эту сумму в (364), получим:

$$h_{e.p} = \frac{x' v_2 (v_2 - v_1)}{g} + \frac{x_1 v_1^2}{2g} - \frac{x_2 v_2^2}{2g}. \quad (371)$$

Приравняв $x_1 = x_2 = x'$, упростим выражение

$$h_{e.p} = \frac{x(v_1 - v_2)^2}{2g}, \quad (372)$$

если принять $x = 1$, то

$$h_{\text{в.р}} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}. \quad (373)$$

Теперь физический смысл потери напора сразу виден.

Действительно, если обозначить $v_1 - v_2 = v_3$, то получим

$$h_{\text{в.р}} = \frac{v_3^2}{2} = E_k, \quad (374)$$

что представляет собой потерянную кинетическую энергию или скорость $v_3 = v_1 - v_2$.

Формулу (373) называют формулой Борда. Но получения (372) недостаточно: нам следует определить коэффициенты местного сопротивления.

С этой целью преобразуем (132) в следующий вид: разделив и умножив на v_1^2

$$h_{\text{в.р}} = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g}. \quad (375)$$

Определим v_2/v_1 из уравнения неразрывности $v_1 w_1 = v_2 w_2$ как $v_2/v_1 = w_1/w_2$ и подставим в (135):

$$h_{\text{в.р}} = \left(1 - \frac{w_1}{w_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g}. \quad (376)$$

Остается, сравнив (376) и (355), заключить, что

$$\xi_{\text{в.р.1}} = \left(1 - \frac{w_1}{w_2}\right)^2. \quad (377)$$

Если бы (375) преобразовали, разделив и умножив на v_2 , то получили бы

$$\xi_{\sigma.p.2} = \left(\frac{w_2}{w_1} - 1 \right). \quad (378)$$

Индексы показывают значение ξ в соответствующем сечении. Определим отношение:

$$\frac{\xi_{\sigma.p.1}}{\xi_{\sigma.p.2}} = \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{w_1^2}{w_2^2}, \quad (379)$$

т. е. отношение местных сопротивлений обратно пропорционально отношению площади сечений: $\xi_{\sigma.p.1} > \xi_{\sigma.p.2}$ во столько же раз, во сколько раз $w_1^2 < w_2^2$.

Задача решена: коэффициенты местных сопротивлений определены.

Отметим только: если поток состоит из участков с разными ξ_m , то коэффициент сопротивления системы находят по формуле:

$$\sum v\xi \frac{k^2}{2g}, \quad (380)$$

где k — число, показывающее количество участков.

Изучение вопросов потери напора нами практически завершено. Конечно, можно было бы продолжать рассмотрение этого вопроса и рассмотреть ряд частных случаев, наиболее часто встречающихся. Но приведенные раскладки, думается, достаточны, чтобы читатель при необходимости сам мог разобраться с интересующим его вопросом.

Расчет трубопроводов

Будем рассматривать установившееся напорное движение потока. Сначала несколько слов о трубопроводах. По принятой в гидравлике классификации, по конструктивным особенностям различают трубопроводы:

1. **Простые**, когда трубопровод не имеет ответвлений, диаметр его постоянен по всей длине, он изготовлен из одного и того же материала.

2. **Сложные**, когда трубопровод состоит из разных по диаметру труб или ответвлений или параллельно соединенных с общим входом и выходом.

Очевидно, что в зависимости от длины или других конструктивных особенностей, на отдельных участках трубопроводов потери напора разные. Поэтому, в зависимости от значения и характера потери напора, различают:

1) **длинные трубопроводы**, в которых потери напора по длине незначительно больше суммы местных Σ и скоростных напоров $xv^2/2g$, вместе взятых. Поэтому суммой $\Sigma(v + xv^2/2g)$ пренебрегают, вычисляют h_p , а после увеличивают полученный результат на 5—10%;

2) **короткие трубопроводы**, когда потери напора h_l и h_m сопоставимы. Поэтому, при расчетах коротких трубопроводов учитывают не только эти потери, но и скоростные потери напора в потоке.

Задачи расчета трубопроводов

Сформулируем задачи, которые нам предстоит решать: все зависит от того, какие параметры требуется определить и какова методика расчета. В зависимости от этих раскладок, различают следующие задачи:

1) требуется определить расход потока Q , при этом заданы напор H ; длина трубы l ; шероховатость трубы $\Delta\tau$; плотность жидкости ρ ; вязкость жидкости V (кинематическая);

2) требуется определить напор H . Заданы расход потока Q ; параметры трубопровода: длина l ; диаметр d ; шероховатость Δ ; параметры жидкости: ρ плотность; вязкость V ;

3) требуется определить необходимый диаметр трубопровода d . Заданы расход потока Q ; напор H ; длина трубы l ; ее шероховатость Δ ; плотность жидкости ρ ; ее вязкость V .

Методика решений задач одна и та же: совместное применение уравнений Бернулли и неразрывности.

Здесь будем рассчитывать только простые трубопроводы.

Расчет длинного трубопровода. Основные формулы

Если сжато сформулировать триединую задачу, то расчет трубопровода сводится к определению расхода потока Q ; напора в потоке H ; диаметра трубы d .

Составим уравнение Бернулли для сечений 1—1 и 2—2, согласно рисунку.

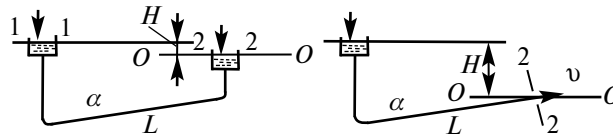


Рис. 4. Проблема «двух резервуаров»

Поскольку $h_l \gg \left(h_m + \frac{v^2}{2g} \right)$, то, пренебрегая суммой, заключаем:

$$H = h_l. \quad (381)$$

Однако полученный результат в практике приходится увеличивать на 5—10%.

По определению, гидравлический уклон

$$J = \frac{h_l}{l}, \quad (382)$$

откуда

$$h_l = Jl,$$

где l — длина исследуемого трубопровода, т. е. $H = Jl$, из чего следует $J = H/l$.

Подставим J в формулу Шези $v = c\sqrt{RJ}$, получаем

$$v = c\sqrt{\frac{RH}{l}}, \quad (383)$$

где v — средняя скорость потока.

Определив из (383) напор, получим

$$H = \frac{v^2 l}{c^2 R}. \quad (384)$$

Что касается расхода жидкости, то с учетом (383),

$$Q = wv = wc\sqrt{RJ}, \quad (385)$$

поскольку $J = H/l$.

Важной характеристикой трубопровода является величина, которая объединяет некоторые параметры трубопровода, исходя из диаметра трубы (рассматриваем простые трубы, где диаметр по всей длине l постоянен). Этот параметр k называют **расходной характеристикой**:

$$k = wc\sqrt{R}.$$

Физическим смыслом k является то, что представляет собой расход потока при единичном гидравлическом уклоне J . Выразим расход и напор потока через модуль расхода.

Из (385) следует:

$$Q = k\sqrt{J}, \quad (386)$$

из (384) следует

$$H = \frac{Q^2 l}{k^2}. \quad (387)$$

Возьмем, аналогично понятию удельной энергии, понятие удельного сопротивления A , где

$$A = \frac{1}{k^2} = \frac{1}{w^2 c^2 R}. \quad (388)$$

С учетом (388), выражение для напора

$$H = A l Q^2. \quad (389)$$

Физический смысл удельного сопротивления в том, что оно является напором, который необходимо рассматривать на длине тру-

бпровода при единичном расходе, другими словами, A показывает, какая потеря напора требуется для «прохода» единичного расхода потока на длине трубопровода l .

Если подставить коэффициент Шези $c = \sqrt{8g/\lambda}$, то

$$A = \frac{8\lambda}{g\pi^2 d^5} v 0,83 \frac{\lambda}{d^5}, \quad (390)$$

т. е. удельное сопротивление является функцией вида $A = f(\lambda, d)$.

Мы привели основные формулы, по которым ведется расчет трубопроводов.

Расчет трубопровода с переменным расходом по длине

Особенность данного вопроса в том, что до сих пор, решая задачи гидродинамики с разных точек зрения, мы полагали, что расход потока постоянен. Теперь придется это положение пересмотреть на примере расчета трубопровода с переменным расходом вдоль пути.

Действительно, что бы мы ни рассмотрели вокруг, везде можно встретить трубопроводы с такими элементами, которые служат для раздачи жидкости еще до конца трубопровода. Это водопроводы, система поливов в сельском хозяйстве и т. д.

Как их рассчитать? Что в них происходит?

Если начинать наблюдение с самого начала трубопровода, то увидим: некоторая часть жидкости, не изменяясь, доходит до конца трубопровода транзитом. Пусть это количество будет Q_t (транзитный расход).

Жидкость по пути частично раздается потребителям: обозначим эту часть как Q_p (путевой расход).

С учетом этих обозначений, в начале трубопровода

$$Q = Q_t + Q_p,$$

соответственно, в конце расход потока

$$Q - Q_p = Q_t.$$

Теперь попробуем рассчитать трубопровод с переменным расходом. Пусть имеем трубопровод, от которого по пути длиной l забрали жидкость Q_p . Теперь выделим сечение этого участка, которое отстоит от начала трубопровода на расстояние x .

Чему равен в этой точке расход Q_k ? Очевидно, что

$$Q_\Omega = Q_T + Q_p - \frac{Q_p}{l}x. \quad (391)$$

В этой формуле расход происходит до конца трубы. Q_T — общее количество путевого расхода по всей длине l ; $(Q_p/l)x$ — расход, затраченный до определенной точки от начала трубопровода, Q_n — оставшийся расход в точке x , $(Q_p + (Q_p/l)x)$ — расход, который будет затрачен до конца трубопровода, после точки x .

Если движение равномерное, то для любого i -ого сечения

$$J = \frac{Q_i^2}{k_i^2}. \quad (392)$$

Возвращаясь к действительности, отметим, что после каждой розданной порции Q_i напор (то есть скорость) уменьшается. Однако в пределах выбранного участка dx этим несоответствием можно пренебречь:

$$dH = Jdx. \quad (393)$$

Обозначим сечение на расстоянии x , как Ω . На этом сечении гидравлический уклон

$$J_\Omega = \frac{Q_\Omega^2}{k^2} = \frac{\left(Q_T + Q_p - \frac{Q_p}{l}x\right)^2}{k^2}. \quad (394)$$

Подставив (394) в (393) и интегрировав в пределах $[0, l]$, при предположении $k = \text{const}$ получим:

$$H = \frac{1}{k^2(Q_T + Q_p)^2 x} - \frac{Q_p(Q_T + Q_p)}{l} x^2 + \frac{1}{3} \times \frac{Q_p^2}{l^2} x^3 \Big|_0^l$$

После вычисления:

$$H = \frac{1}{k^2} \left(Q_T^2 + Q_T Q_p + \frac{1}{3} Q_p^2 \right). \quad (395)$$

Для еще большего упрощения введено понятие «расчетный расход» $Q_{\text{расч}} = Q_T + 0,55 Q_p$, где

$$Q_T + 0,55 Q_p \approx Q_T^2 + Q_T Q_p + \frac{1}{3} Q_p^2, \quad (396)$$

тогда из (395) следует

$$H = Q_{\text{расч}}^2 \frac{l}{k^2}. \quad (397)$$

Если рассматривается напор в квадратичной области, то учитывается, что коэффициент Шези в переходной зоне c относится к тому же коэффициенту в квадратичной области, как

$$\frac{c}{c_{кв}} = \sqrt{\frac{\lambda_{кв}}{\lambda}},$$

где $\lambda, \lambda_{кв}$ — соответствующие коэффициенты Дарси.

В гидравлике принято, что

$$\frac{\lambda}{\lambda_k} = \frac{1}{Q_1^2} = \frac{1}{\theta_1^2} = \theta_2.$$

Поэтому, поскольку $k = wc\sqrt{R}$ и $k_{кв} = wc_{кв}\sqrt{R}$, то

$$\frac{\kappa}{\kappa_{кв}} = Q_1,$$

если учесть в (397) $k^2 = k_{кв}^2 \theta_1^2 = \frac{k_{кв}^2}{\theta_2}$, то

$$H = \frac{\theta_2 Q_{расх}^2 l}{k_{кв}^2}. \quad (398)$$

Если $Q_p = 0$, то $Q_{расх} = Q_t$, если $Q_t = 0$, то $Q_{расх} = 0,55 Q_p$.
Из (395) следует, что если $Q_t = 0$, то

$$H = \frac{1}{3} \times \frac{Q^2 l}{k^2}.$$

ЛЕКЦИЯ № 10. Движение жидкости в напорных трубопроводах при неустановившемся движении

Будем рассматривать неустановившееся движение жидкости в напорном трубопроводе. Не мешает вспомнить, что этот вид движения отличается от установившегося тем, что такие его параметры, как местные скорости U_x , U_y , U_z , а также давление в среде движения p не меняются со временем, все перечисленные параметры являются функциями координаты времени, например, $U_x = (U_x(x, y, z, Z))$.

Все разновидности движения, что мы рассмотрели для установившегося — напорное и безнапорное, одно-, двух-, трехмерное, ламинарное и турбулентное — имеют место также для неустановившегося напорного движения в трубопроводах.

1. Гидравлический удар

Наиболее распространенным, то есть часто встречающимся видом неустановившегося движения является **гидравлический удар**. Это типичное явление при быстром или постепенном закрытии затворов (резкое изменение скоростей в некотором сечении потока приводит к гидравлическому удару). Как следствие, возникают давления, которые распространяются по всему трубопроводу волной.

Эта волна может быть разрушительной, если не принять специальные меры: могут разорваться трубы, выйти из строя насосные станции, возникнуть насыщенные пары со всеми разрушительными последствиями и т. д.

Гидравлический удар может порождать разрывы жидкости в трубопроводе — это не менее серьезная авария, чем разрыв трубы.

Наиболее часто встречающиеся причины гидравлического удара следующие: внезапное закрытие (открытие) затворов, внезапная остановка насосов при заполнении трубопроводов водой, выпуск

воздуха через гидранты в оросительной сети, пуск насоса при открытом затворе.

Если это уже случилось, то как протекает гидравлический удар, какие последствия вызывает?

Все это зависит от того, по какой причине возник гидравлический удар. Рассмотрим основную из этих причин. Механизмы возникновения и протекания по остальным причинам сходны.

Мгновенное закрытие затвора

Гидравлический удар, который происходит в этом случае — чрезвычайно интересное явление.

Пусть имеем открытый резервуар, от которого отводится гидравлическая прямолинейная труба; на некотором расстоянии от резервуара труба имеет затвор. Что произойдет при его мгновенном закрытии?

Во-первых, пусть:

- 1) резервуар настолько велик, что процессы, происходящие в трубопроводе, в жидкости (в резервуаре) не отражаются;
- 2) потери напора до закрытия затвора ничтожны, следовательно, пьезометрическая и горизонтальная линии совпадают;
- 3) давление жидкости в трубопроводе происходит только с одной координатой, две другие проекции местных скоростей равны нулю; движение определяется только продольной координатой.

Во-вторых, теперь внезапно закроем затвор — в момент времени t_0 ; могут произойти два случая:

- 1) если стенки трубопровода абсолютно неупругие, т. е. $E = \infty$, и жидкость несжимаема ($E_{ж} = \infty$), то движение жидкости также внезапно останавливается, что приводит к резкому росту давления у затвора, последствия могут быть разрушительны. Это теоретически;
- 2) на практике жидкость всегда сжимаема, у стенок имеется упругость, правда, в обоих случаях в разной степени. После закрытия затвора за бесконечно малый промежуток времени Δt остановится слой между сечениями 1—1 и 2—2. Обозначим этот слой 1122 (слой можно назвать телом гидравлического удара, конечно, условно; как нет сплошной жидкости, так и нет такого тела), его толщина Δl .

В течение времени $t + \Delta t$, часть потока выше сечения 1—1 продолжает двигаться со скоростью v_0 к затвору, но он закрыт.

Поэтому под влиянием этого скоростного напора «тело» гидравлического удара 1122 сжимается, давление повышается на величину Δp , то есть теперь $p = p_0 + \Delta p$ давит на стенки трубопровода. Стенки трубопровода растягиваются, в результате возникает некоторый объем ΔV , который тут же заполняет еще движущаяся жидкость.

Чему равно это приращение давления Δp ? Для того, чтобы определить Δp , воспользуемся теоремой об изменении количества движения (речь идет о количестве импульсов) применительно к массе «тела» гидравлического удара 1122, для чего, спроецировав на продольную ось, по которой происходит движение:

- 1) импульс внешних сил, получим

$$\Delta p \omega \Delta t; \quad (399)$$

- 2) изменение количества движения «тела» гидравлического удара (имеется в виду его масса)

$$(\rho \omega \Delta l r_0 + \rho \omega v_0 \Delta t), \quad (400)$$

где $\rho \omega v_0 \Delta t$, содержащееся во втором слагаемом, является массой жидкости, заполнившей объем ΔV , который образовался за время Δt после закрытия затвора.

Несколько преобразуем (400): будем считать, что $\omega = \omega_0$, то есть изменения площади сечения 1—1 до и после гидравлического удара ничтожны. С другой стороны, приравняв (399) и (400),

$$\Delta p \Delta t = \rho \Delta l v_0 + \rho v_0^2 \Delta t. \quad (401)$$

Если разделить (401) на Δt , то получим некоторую скорость вида $\Delta l / \Delta t = C$. С учетом этого, формула (401) превращается в широко известную формулу Жуковского:

$$\Delta p = \rho C v_0 + \rho v_0^2. \quad (402)$$

Искомое приращение найдено. Можно перейти к выражению для определения приращения напора ΔH , разделив уравнение (402) на ρg .

$$\frac{\Delta p}{\rho g} = \Delta H = \frac{Cv_0}{g} + \frac{v_0}{g}. \quad (403)$$

В формулах (402) и (403) C — это скорость ударной волны, т. е. скорость распространения гидравлического удара по трубопроводу.

Ясно, что скорость любого возмущения в жидкости тоже будет C . Вторым слагаемым в (402) можно пренебречь, поскольку $C \gg v_0$. В таком случае, $\Delta = \rho Cv_0$, как следует из (402).

Теперь начинается самая интересная часть нашего анализа гидравлического удара (нетрудно заметить, что распространение волны гидравлического удара происходит подобно движению электрического тока — это очень важное наблюдение).

Происходит следующее: если бы нам удалось сделать моментальный снимок, мы увидели бы, что после внезапного закрытия затвора в теле гидравлического удара давление стало $(p + \Delta p)$, все это произошло за время $t = t_0 + l/C$, где l — расстояние от затвора до сечения 1—1, это сечение прошло путь l к затвору, увеличивая p и ρ .

Когда сечение 1—1 достигло затвора, то его скорость стала $v = 0$. Но до этого все слои в теле гидравлического удара, достигнув затвора, тоже потеряли скорость v до нуля.

После этого началось обратное движение сечения 1—1, достигнув резервуара, оно заняло положение 1—1, пройдя путь l от затвора до резервуара. $t = t_0 + l/C$ (следует отметить, что все величины с индексом ноль относятся к процессам, происходящим в теле гидравлического удара 1122), и жидкость достигла состояния мгновенного покоя.

Теперь состояние с $p = p_0 + \Delta p$ и $\rho = \rho_0 + \Delta \rho$ установилось по всему трубопроводу от затвора до резервуара.

Это новое состояние не может передаваться резервуару в силу нашего допущения, следовательно, должно передаваться обратно к затвору. Так и происходит: особенность этого мгновенного покоя

в том, что вся напряженность сложилась у сечения 1'—1', у стенок резервуара, в остальной части трубопровода восстановилось давление p_0 и стенки трубы восстановили первоначальную форму.

И все это произошло за время $t = t_0 + l/C$. Поскольку у сечения 1'—1' накопилась напряженность, она должна искать выход, поэтому от стенок резервуара отражается обратно в момент времени $t = t_0 + l/C$ (не путать эту форму записи с предыдущей; в течение времени $t = t_0 + l/C$ и в момент времени $t = t_0 + l/C$ — не одно и то же).

Теперь, двигаясь обратно, сечение 1'—1' снова стало в положение 1—1 — это произошло в момент времени

$$t = t_0 \frac{l}{C} + \frac{L-l}{C} = t_0 + (2L-1)C. \quad (404)$$

В этот момент в сечении 1—1 давление снова p_0 , но скорость движения $v = -v_0$ и стенки трубопровода и все состояние жидкости, как в момент времени t_0 .

Однако в тело гидравлического удара, где сечение 1—1 продолжает свое движение к затвору, давление снова $p + p_0$, но $v = v_0$.

Каждая ударная волна достигла затвора в момент времени $t = t_0 + 2l/C$, давление у затвора стало меньше, чем p_0 на $\Delta p = \rho C v_0$, но все еще $p > p_{н.п.}$ (давление насыщенного пара), в противном случае жидкость оторвалась от затвора. В этот момент времени $t = t_0 + 2l/C$ после мгновенной остановки начинается новый процесс, и волна отражается от резервуара. Снова стены трубы сжаты, снова $v = 0$, а давление $p = p_0 - \Delta p$, где $\Delta p = \rho C v_0$, плотность $\rho = \rho_0 - \Delta \rho$. Это все до того, пока ударная волна не достигнет сечения 1—1, то есть на участке длиной l и в момент времени $t = t_0 + 2l/C + l/C = t_0 + (2L + l)/C$.

А вот на участке $(L - l)$ давление снова p_0 , скорость движения $v = -v_0$, $p = p_0$, то есть и стенки трубопровода, и состояние жидкости, как и в момент времени t_0 разовое, в отличие от направления скорости.

Когда ударная волна повторно достигла стенки резервуара, прошло время $t = t_0 + 3l/C$. В этот момент давление на 1'—1', то есть у стенок резервуара, $p < p_0$, поэтому жидкость снова отра-

жается обратно. На этот раз ее заставляет отражаться разреженность у стенок из-за $p < p_0$.

Все повторяется снова: когда ударная волна достигает сечения 1—1, прошло время

$$t = t_0 + 3\frac{l}{C} + \frac{L-l}{C}, \quad p = p_0 - \Delta p, \quad v = 0, \quad (405)$$

жидкость разрежена.

Когда ударная волна достигнет затвора, то $t = t_0 + 4l/C$, а после нового гидравлического удара давление снова восстановится до $p = p_0 + \Delta p$. Таким образом, через каждые $2l/C$ происходит колебание давления p вокруг p_0 , то есть через каждые $2l/C - p = p_0 \pm \Delta p$. А это биение колебания. Величину $2l/C$ называют **фазой гидравлического удара** τ_0 .

Период этого колебания

$$T_0 = 2\tau_0 = 4\frac{l}{C}. \quad (406)$$

Отметим несколько характерных моментов:

- 1) мы рассмотрели весь процесс как бы при отсутствии сил трения, точнее, ими пренебрегли;
- 2) у сечения 1—1 чередуются фазы скорости $v = +v_0, v = 0, v = -v_0$;
- 3) у стенки резервуара (вход трубопровода) скорость перебрасывается от $+v_0$ на $-v_0$ через каждые $4l/C$; от $-v_0$ на $+v_0$ тоже через каждые $4l/C$; однако фазы в первом и втором случаях сдвинуты относительно друг друга на $t = 2l/C$;
- 4) если гидравлический удар начинается с повышения давления, то это положительный удар, в противном случае гидравлический удар отрицательный;
- 5) выше перечислены возможные причины возникновения гидравлического удара. При внезапной остановке насоса гидравлический удар происходит точно так же, как было и в проведенном здесь анализе.

Кроме того, если внезапно открывать затвор, ситуация опять повторится, только давление сначала не увеличится, а уменьшится на Δp , только через одну фазу $2l/C$, все будет соответствовать приведенному выше анализу.

Постепенное закрытие затвора

Хотя рассмотренный выше случай вызван мгновенным закрытием затвора, на практике такое закрытие невозможно. Время закрытия затвора, обозначим его как T_3 , всегда больше нуля. В зависимости от того, как соотносятся фаза гидравлического удара τ_0 и T_3 , различают следующие разновидности гидравлических ударов.

Прямой гидравлический удар

Это тот случай, когда $T_3 < \tau_0 = 2l/C$. Интерес представляет выяснение: как поведут себя при закрытии Δp и средняя скорость v_t .

Поскольку при плавном закрытии площадь выходного сечения 2—2,

$$v_t = v(t). \quad (407)$$

Поэтому при:

$$t = 0, v_t = 0;$$

$$t = t, v_t = v_t \text{ — текущая скорость в текущий момент времени;}$$

$$t = T_3, v_t = v_{T_3} = 0.$$

Однако изменение скорости ступенчатое, поскольку является следствием ряда изменений давления.

$$\Delta p_t = \rho C \Delta v_t \quad (408)$$

Это давление достигает своего максимума при $t = T_3$ (при этом $v_t = 0$), $\Delta p_t = \rho C \Delta v_0$.

В любой другой момент времени $t < T_3$

$$\Delta p < \rho C v_0 + \rho v_0^2 \quad (409)$$

(см. формулу (402)), поскольку при $t < T_3$ разность средних скоростей

$$\Delta v_t = \rho C(v_0 - v_t), \quad (410)$$

следовательно,

$$\Delta p_t = \rho C(v_0 - v_t).$$

При получении формулы (402) мы пользовались теоремой о проекции момента количества движения, куда входила Δv_t .

Где будет фронт ударной волны, если $T_3 = t = \tau_0$?

Если закрытие затвора произошло в момент времени t_0 , то возникающая ударная волна на сечении 2—2, пройдя до входного сечения 1'—1', то есть до резервуара, вернется обратно к затвору за время $t = 2l/C = \tau_0 = T_3$. При этом

$$p_{T_3} = p_0 + \Delta p. \quad (411)$$

Однако еще через какое-то время $2l/C$, то есть в момент времени $t = T_3 + 2l/C$, давление уже другое:

$$p_{2T_3} = p_0 - \Delta p. \quad (412)$$

С этого момента $t = 4l/C$ начинается падение давления. И так продолжается незатухающий процесс (нет сил трения, график процесса напоминает синусоиду или косинусоиду).

Непрямой гидравлический удар

В этом случае $T_3 > \tau_0 = 2l/C$. Отметим, что за время $t = 2l/C$ волна, дойдя и отражаясь от резервуара, успевает вернуться к затвору до его полного закрытия. Если бы выбрали $T_3 > 2l/C$, то в момент возврата ударной волны к затвору $t = 4l/C$ затвор еще закрыт, и скорость поступательного движения имеется. А до момента $t = 4l/C$ пониженное на Δp давление встречается раньше времени, поскольку повышение еще не совсем погашено. То же самое будет при $T_3 > 6l/C, 8l/C$ и т. д. В итоге диаграмма колебаний напоминает диаграмму пилообразного электрического напряжения.

2. Скорость распространения волны гидравлического удара

В гидравлических расчетах немалый интерес представляет скорость распространения ударной волны гидравлического уда-

ра, как и сам гидравлический удар. Как ее определить? Для этого рассмотрим круглое поперечное сечение в упругом трубопроводе. Если рассмотреть участок длиной Δl , то выше этого участка за время Δt жидкость еще движется со скоростью v_0 , кстати, как и до закрытия затвора.

Поэтому в соответствующей длине l объем $\Delta V'$ войдет жидкость $Q = \omega_0 v_0$, то есть

$$\Delta V' = Q\Delta t = \omega_0 v_0 \Delta t, \quad (413)$$

где площадь круглого поперечного сечения — объем, образовавшийся в результате повышения давления и, как следствие этого, из-за растяжек стены трубопровода ΔV_1 . Объем, который возник из-за роста давления на Δp обозначим как ΔV_2 . Значит, тот объем, который возник после гидравлического удара, есть

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2, \quad (414)$$

$\Delta V'$ входит в ΔV .

Определимся теперь: чему будут равны ΔV_1 и ΔV_2 .

В результате растяжки трубы произойдет приращение радиуса трубы на Δr , то есть радиус станет равным $r = r_0 + \Delta r$. Из-за этого увеличится круглое сечение поперечного сечения на $\Delta \omega = \omega - \omega_0$. Все это приведет к приращению объема на

$$\Delta V_1 = (\omega - \omega_0)\Delta l = \Delta \omega \Delta l. \quad (415)$$

Следует иметь в виду, что индекс ноль означает принадлежность параметра к начальному состоянию.

Что касается жидкости, то ее объем уменьшится на ΔV_2 из-за приращения давления на Δp .

$$\Delta V_2 = \beta_c \omega_0 \Delta l \Delta p, \quad (416)$$

где $\beta_c = 1/E_{жс}$ — некоторый коэффициент;

$E_{жс}$ — модуль упругости жидкости;

$$\Delta V_2 = \frac{\omega_0 \Delta l \Delta p}{E_{жс}}.$$

Учитывая, что $\Delta V_1 + \Delta V_2 = \Delta V = \omega_0 v_0 \Delta t$ (поскольку $V = Qt$, то $\Delta V = \Delta Q \Delta t$, с учетом того, что $Q = \omega_0 v_0$, $\Delta V = \omega_0 v_0 \Delta t$), подставив (415) и (416), получим $\omega_0 \Delta l (\Delta p / E_{жс}) + \Delta \omega \Delta l$.

Разделим полученное уравнение на $\omega_0 \Delta l$, затем, перегруппировав, получим

$$v_0 = \frac{\Delta t}{\Delta l} = \frac{\Delta \omega}{\omega_0} + \frac{\Delta p}{E_{жс}}. \quad (417)$$

Вспомним формулу Жуковского (см. (402)) и подставим в (417) значение v_0 , определенное из (417). Далее, при $\Delta t \rightarrow 0$, взяв предел от полученного выражения, имеем:

$$C = \sqrt{\frac{\frac{dp}{p}}{\frac{dp}{E_{жс}} + \frac{d\omega}{\omega_0}}}. \quad (418)$$

Получим искомую формулу скорости распространения волны гидравлического удара.

$$C = \sqrt{\frac{\frac{E_{жс}}{\rho}}{1 + \frac{D}{l} + \frac{E_{жс}}{E}}}, \quad (419)$$

где ρ — плотность жидкости;

D/l — параметр, характеризующий толщину стенки трубы.

Очевидно, что чем больше D/l , тем меньше скорость распространения волны C . Если труба жесткая абсолютно, то есть $E = \infty$, то, как следует из (419),

$$C_0 = \sqrt{\frac{E_{жс}}{\rho}}, \quad (420)$$

поскольку в (419) знаменатель дроби превращается в ноль.

3. Дифференциальные уравнения неустановившегося движения

Для того, чтобы составить уравнение любого вида движения, нужно проецировать все действующие силы на систему и приравнять их сумму к нулю. Так и поступим.

Пусть имеем напорный трубопровод круглого сечения, в котором есть неустановившееся движение жидкости.

Ось потока совпадает с осью l . Если выделить на этой оси элемент dl , то, согласно вышеуказанному правилу, можно составить уравнение движения

$$\Delta M \frac{dv}{dt} = \Delta p + \Delta G + \Delta T. \quad (421)$$

В приведенном уравнении проекции четырех сил, действующих на поток, точнее, на Δl , равны нулю:

- 1) ΔM — силы инерции, действующие на элемент dl ;
- 2) Δp — силы гидродинамического давления;
- 3) ΔT — касательные силы;
- 4) ΔG — силы тяжести: здесь мы, говоря о силах, имели в виду проекции сил, действующих на элемент Δl .

Перейдем к формуле (421), непосредственно к проекциям действующих сил на элемент Δl , на ось движения.

1. Проекция поверхностных сил:

- 1) для гидродинамических сил Δp проекцией будет

$$\frac{\partial(\rho + \omega)}{\partial l} dl; \quad (422)$$

- 2) для касательных сил ΔT

$$\tau_0 dl X = \frac{\tau_0}{R} \omega dl; \quad (423)$$

поскольку смоченный периметр $X = \omega/R$, где ω — площадь круглого сечения, R — радиус трубы.

Поскольку выбран бесконечно малый элемент Δl , то сопротивление можно считать квазистационарным, это позволяет рассмотреть движение почти как установившееся (квазистационарное), поэтому можно заменить $\tau_0/R = \rho g J$, где J — гидравлический уклон. Проекция касательных сил имеет вид:

$$-\rho g \omega J dl. \quad (424)$$

2. Проекция сил тяжести ΔG на элемент Δl

$$\rho g \omega dl \sin \Theta = -\rho g \omega dl \frac{\partial z}{\partial l}. \quad (425)$$

3. Проекция сил инерции ΔM равна

$$-\rho g \omega dl \frac{dv}{dt} = -\rho g \omega dl \left(\frac{dv}{dt} + v \frac{\partial z}{\partial l} \right) \quad (426)$$

Теперь, суммировав (422) и правые части (424), (425), (426), затем приравняв их к нулю, имеем (после суммирования все члены умножаем на -1 , чтобы изменить знак):

$$\frac{1}{\rho g} \times \frac{\partial p}{\partial l} + J + \frac{1}{g} \times \frac{dv}{dt} + \frac{d}{dt} \times \frac{v^2}{2g} = 0. \quad (427)$$

Приведем (427) в следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \times \frac{\partial v}{\partial t} - J. \quad (428)$$

Вспомним уравнение неразрывности для элементарной струйки:

$$\frac{\partial(\rho - Q)}{\partial l} + \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} = 0. \quad (429)$$

Применим это уравнение для элементарной струйки:

$$\rho \frac{\partial Q}{\partial l} + Q \frac{\partial \rho}{\partial l} + \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \omega \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (430)$$

Но, поскольку плотностью можно пренебречь, то, следовательно, можно пренебречь членом, содержащим $\partial \rho / \partial t$.

Поэтому

$$\rho \frac{\partial Q}{\partial l} + Q \frac{\partial \rho}{\partial l} + \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0. \quad (431)$$

Далее, определяя для конечного члена (431) соответствующее выражение, после некоторых рассуждений получают уравнение, которое приводим без вывода (чтоб не потерять общее направление лекции)

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{C^2}{g} \times \frac{\partial v}{\partial l}, \quad (432)$$

где H — пьезометрический напор;

C_0 — скорость жидкости.

Если рассмотреть уравнения (428) и (432), то их называют общими дифференциальными уравнениями неустановившегося напорного движения реальной жидкости в трубопроводах (упругих). Однако, при расчете гидравлического удара, удастся пренебречь потерями на трение при $J = 0$, а также кинетической энергией $v^2/2g$ в формуле для скорости распространения ударной волны C . Из (428) следует:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{g} \times \frac{dv}{dt}, \quad (433)$$

здесь учли, что в первой части (428)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(Z + \frac{p}{\rho g} \right) = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Уравнения (191) и (192), рассматривая в совокупности, называют дифференциальными уравнениями неустановившегося движения невязкой жидкости.

Гидравлический удар может привести к разрыву сплошности потока, который по своим последствиям сопоставим с разрывом трубы.

Когда и как это может произойти? А что такое «разрыв сплошности жидкости» вообще? Это такое состояние жидкости, когда из-за низкого давления жидкость настолько разрежена, что превращается в пар и смешивается с воздухом, при котором начинается это превращение («холодное кипение»), это называют **давлением насыщенных паров** — $p_{\text{нас.п.}}$. Разрыв может произойти:

- 1) при внезапной остановке насоса, когда движение воды продолжается по инерции;
- 2) при перемене направления движения.

Во всех этих случаях должно выполняться условие

$$\rho C v_0 > \rho g (H_0 + h_{\text{вак.мах}}), \quad (434)$$

где C — повышение давления по формуле Жуковского;

H_0 — начальный напор;

$h_{\text{вак.мах}}$ — вакуумметрическая высота (наибольшая), обычно

$h_{\text{вак.мах}} = 7-8$ м.

Наиболее вероятными местами разрыва сплошности жидкости являются места вблизи насосных станций, и там, где трубы имеют выпуклый профиль.

ЛЕКЦИЯ № 11. Истечение жидкости

Что есть истечение? Это как бы переходная форма между полным потоком и элементарной струйкой, одна из частных разновидностей формы движения жидкости, одно из самых интересных явлений природы.

Истечение — движение жидкости через некоторое отверстие. Этим явлением пользуются, когда нужно определить количество воды, узнать время наполнения или опорожнения резервуаров, водохранилищ, провести расчет шлюзов и т. п.

Истечения различают, как и напорное движение в трубопроводах, при постоянном и переменном напорах, через малое или большое отверстие. Особо следует отметить истечение через тонкую стенку. Такой считают стенку, которая имеет по всему периметру острую кромку. Из-за этого толщина стенки не влияет на движение струи (истечение).

Задачей теории истечения является определение скорости истечения, расход вытекающей жидкости.

Результаты этих задач тем точнее, чем более постоянен напор по сечению всего отверстия. Именно такого рода истечения будем рассматривать в данной лекции.

1. Истечение жидкости при постоянном напоре через малое отверстие

Будем рассматривать истечение, которое происходит через малое незатопленное отверстие. Для того, чтобы отверстие считать малым, должны выполняться условия:

- 1) напор в центре тяжести $H \gg d$, где d — высота отверстия;
- 2) напор в любой точке отверстия практически равен напору в центре тяжести H .

Что касается затопленности, то таковой считают истечение под уровень жидкости при условии, если не изменяются со временем: положение свободных поверхностей до и после отверстий, давление на свободные поверхности до и после отверстий, атмосферное давление по обе стороны от отверстий.

Таким образом, имеем резервуар с жидкостью, у которой плотность ρ , из которого через малое отверстие происходит истечение под уровень. Напор H в центре тяжести отверстия постоянен, что значит, скорости истечения постоянны. Следовательно, движение установившееся. Условие равенства скоростей на противоположных вертикальных границах отверстий является условие $d \leq 0,1H$, где d — наибольший вертикальный размер.

Ясно, что нашей задачей является определение скорости истечения и расхода жидкости в нем.

Попутно будем определять впервые встречающиеся гидравлические понятия.

Пусть:

- 1) на свободную поверхность резервуара действуют давление p_0 ;
- 2) истечение происходит в атмосферу, где давление — p_c , т. е. истечение незатопленное;
- 3) истечение происходит через тонкую стенку, то есть толщина стенки не влияет на форму струи. Что происходит со струей после отверстия? Еще до отверстия линии тока при подходе к отверстию искривляясь, сжимаются. Это сжатие продолжается и после отверстия, пока частицы жидкости не оказываются от отверстия на расстоянии $0,5d$ от внутренней стенки резервуара. На этом расстоянии движение струи стабилизируется, исчезают криволинейность линии тока и сечения струи, движение переходит от неравномерного к плавно изменяющемуся. В действительности картина происходящего очень сложна.

Сечение струи, отстоящее от внутренней стенки резервуара на расстоянии $0,5d$, называют **сжатым сечением струи**, которое характеризуется коэффициентом сжатия.

$$E = \frac{\omega_0}{\omega}, \quad (435)$$

где ω — площадь сечения отверстия;

ω_0 — площадь живого сечения струи.

После сжатого сечения струя переходит в компактную форму, после некоторого пути происходит аэрация (насыщение воздухом), и струя раздробляется.

Вот, собственно говоря, то, что происходит при истечении.

Теперь вернемся к нашим главным задачам: определить скорость струи и расход жидкости.

Для этого применим к струе уравнение Бернулли.

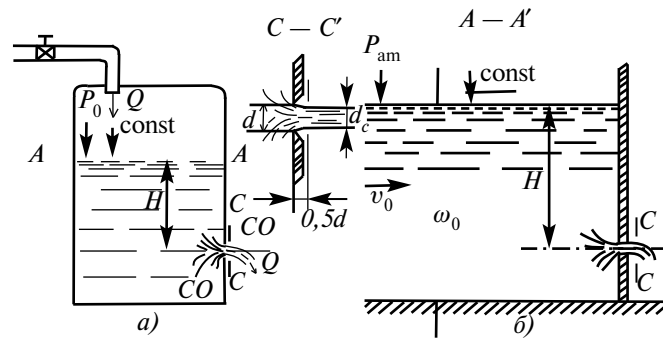


Рис. 5. Затопленное истечение

Отверстие настолько мало, что в пределах сечения $Z + \Delta = \text{const}$.

В сжатом сечении С—С также $p = \text{const}$. Горизонтальная плоскость проведена через центр сжатого сечения, эта плоскость является плоскостью сравнения. При таких условиях составляем уравнение Бернулли для сечений А—А и С—С:

$$H + \frac{p_0}{\rho g} = 0 + \frac{p_c}{\rho g} + \frac{x_c v_c^2}{2g} + h_{\text{тр}}. \quad (436)$$

В этой формуле H — напор в центре тяжести входного отверстия, p_0, p_c — давление в сечениях (выбранных точках) А—А', С—С',

v_0, v_C — средние скорости в тех же сечениях, x_0, x_C — коэффициенты Кориолиса в тех же сечениях, $h_{тр}$ — потери напора на участках между двумя сечениями.

Если выразить потери напора через потери удельной энергии, то

$$h_{тр} = \xi_{o.k.} \frac{vC^2}{2g}, \quad (437)$$

где $\xi_{o.k.}$ — коэффициент потерь или коэффициент сопротивления при истечении из отверстия с острой кромкой.

Перегруппировав с учетом (437) члены в (436), получим:

$$H + \frac{p_0 - p_C}{\rho g} = (x_0 + \xi_{o.k.}) \frac{vC^2}{2g} - \frac{x_0 v_0^2}{2g}. \quad (438)$$

Если учесть уравнение неразрывности для сечений А—А и С—С, то $v_C \omega_C = v_0 \omega_0$, поскольку для сечения, где сжатие $v_C E \omega = v_0 \omega_0$, где ω_0 — площадь живого сечения А—А, затем, выразив $v_0 = v_C \omega_C / \omega_0$ и подставив в (438), получим:

$$H + \frac{p_0 - p_C}{\rho g} = \left[x_0 + \xi_{o.k.} - x_0 \left(\frac{E\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] \frac{vC^2}{2g}. \quad (439)$$

Отсюда выразим при $p_0 \neq p_C$, то есть в общем случае, искомую скорость:

$$v_C = \frac{1}{\sqrt{x_C + \xi_{o.k.} - x_0 \left(\frac{E\omega}{\omega_0} \right)^2}} \times \sqrt{2g \left(H + \frac{p_0 - p_C}{\rho g} \right)}. \quad (440)$$

Формулу (440) можно значительно упростить, обозначив дробь перед квадратным корнем через v_0 .

Кроме того, на практике в большинстве случаев $p_0 = p_{ат}$, то есть $p_0 = p_C = p_{ат}$. С учетом этого, из (440) получим для средней скорости

$$v_C = v_0 = \sqrt{2gH}, \quad (441)$$

где v_0 называется **коэффициентом скорости**.

Теперь выполним вторую задачу, определим расход Q . По определению

$$Q = \omega v = \omega_C v_C = E \omega v_C = v_C = E v_0 \omega \sqrt{2gH}. \quad (442)$$

Обозначим $E v_0 = \mu_0$, где μ_0 — коэффициент расхода, тогда

$$Q = \mu_0 \omega \sqrt{2gH}. \quad (443)$$

Задача, поставленная в начале лекции решена. В заключение о значении коэффициентов сжатия E и расхода μ .

Как известно, E определяет распределение скоростей на участке $0,5d$ от стенки резервуара. Поскольку μ по определению есть $E v_0$, то в нем учтена не только потеря напора, но и степень сжатия струи: учет потери напора содержится в коэффициенте расхода v_0 . Несколько слов о коэффициенте скорости v_0 : этот коэффициент характеризует распределение скоростей в сжатом сечении, а также соотношение площадей ω_C и ω_0 живых сечений С—С и А—А.

Классификация сжатий

Выше ввели для гидравлического расчета истечения следующие коэффициенты:

- 1) E — для вычисления площади;
- 2) v — для вычисления скорости;
- 3) μ — для вычисления расхода;
- 4) $\xi_{o,k}$ — для вычисления потери напора.

От чего зависят эти коэффициенты? Их значения определяют:

- 1) формы и кромки отверстия;
- 2) режимы движения жидкости струи;
- 3) поверхностное натяжение жидкости в резервуаре;
- 4) положение отверстия относительно стенки резервуара.

От этих же факторов зависит степень сжатия, кривизна траектории, расположение отверстия относительно стенки резервуара.

В зависимости от этих факторов, различают следующие разновидности сжатия:

1. **Полное сжатие** — это такое сжатие, которое происходит по всему периметру отверстия, в противном случае сжатие считается неполным сжатием. В этом случае сжатие по периметру частичное.

Ясно, что в этом случае сжатие отсутствует в одной или нескольких сторонах. Например, так бывает, когда отверстие примыкает ко дну или находится в углу резервуара или расположено на дне сосуда. Характерным признаком отсутствия сжатия является прямолинейность линий тока. Подкрасив жидкость, это явление можно наблюдать как в опытах Рейнольдса.

Этот момент — прямолинейность линий тока — порождает следующие последствия: если рассмотреть два отверстия с одинаковой площадью и другими гидравлическими и прочими характеристиками, то площадь живого сечения при неполном сжатии $\omega_{с.непол.} > \omega_{с.пол.}$ — площади живого сечения при полном сжатии. Как следствие этого, $E_{неп} > E_{пол.}$, поскольку по определению $E = \omega_c / \omega$.

2. **Совершенное сжатие** является одной из двух разновидностей полного сжатия. Это такое сжатие, когда кривизны траектории, следовательно, и степень сжатия струи наибольшие. Для того, чтобы получить такую струю, должны выполняться условия: $l_1 > 3a$, $l_2 > 3b$ (см. рис. 6), ω — площадь отверстия.

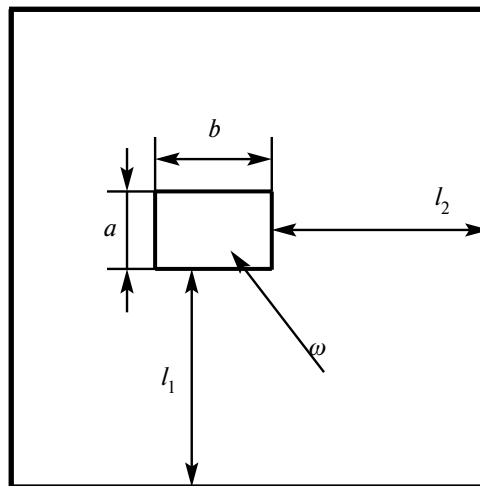


Рис. 6. Определение оптимального местонахождения отверстия

Несовершенное сжатие является второй разновидностью полного сжатия. В этом случае, по причине уменьшения сжатия должно выполняться $l_1 > 3a$, $l_2 > 3b$, взаимоотношения площадей сечения и коэффициентов сжатия в случае с совершенным сжатием так же, что и при сравнении полного и неполного сжатий. То есть,

$$\omega_{с.нес.} > \omega_{с.сов.}, \quad (444)$$

следовательно,

$$E_{нес} > E_{сов} \left(E = \frac{\omega_{с.}}{\omega} \right).$$

Подводя итог, заметим, что неполная и несовершенная формы сжатий приводят к росту коэффициента сжатия. Характерной особенностью совершенного сжатия является то, что в зависимости от того, под воздействием каких сил происходит истечение, существуют их характеристики, позволяющие определяться с диаметром отверстий. При воздействии сил тяжести этой характеристикой является число Фруда $Fr = v^2/gd$, силы вязкости — число Рейнольдса $Re = vd/\nu$, силы поверхностного натяжения — число Вебера $We = v^2\rho d/r$.

Таким образом, в общем случае,

$$\begin{cases} E = E(Fr, Re, We), \\ v = v(Fr, Re, We), \\ \mu = \mu(Fr, Re, We), \end{cases} \quad (445)$$

т. е. коэффициенты сжатия, скорости и расхода являются функциями чисел Фруда, Рейнольдса и Вебера.

Неполное и несовершенное сжатие. При таком сочетании разновидностей сжатий, коэффициент расхода $\mu_{неполн} = E_{неполн} v_0 > \mu_{полн} = E_{полн} v_0$, что выражается эмпирической формулой:

$$\mu_{неп} = \mu \left(1 + K \frac{p'}{p} \right), \quad (446)$$

где μ — коэффициент расхода при полном сжатии;
 p' — та часть периметра, где отсутствует сжатие;
 p — периметр всего отверстия;
 K — коэффициент (0,13 для круглых, 0,15 для прямоугольных сечений).

При сочетании сжатий полное/неполное также $\mu_{\text{нес}} > \mu_{\text{сов}}$, что нашло свое выражение в другой эмпирической формуле:

$$\mu_{\text{нес}} = \mu \left[1 + 0,64 \left(\frac{\omega}{O} \right)^2 \right], \quad (447)$$

где ω — площадь отверстия;

O — площадь стенки, в которой находится отверстие.

Истечение под уровень

При истечении под уровень другой жидкости истечение называют также затоплением. Рассмотрим истечение через затопленное отверстие при условиях:

- 1) положения свободных поверхностей жидкостей до и после отверстия во времени не изменяются;
- 2) давление до и после отверстия атмосферное.

Проведем три сечения: два из них — до (1—1) и после (2—2) отверстия: они расположены горизонтально на свободных поверхностях. Третье сечение (3—3) проведем через отверстие. Также через отверстие проведем плоскость сравнения (она горизонтальная), введем Z_1, Z_2 — перепад уровней жидкости соответственно до и после отверстия.

Очевидно, что сечения 1—1 и 2—2 совпадают со свободной поверхностью, запишем для этих поверхностей уравнение Бернулли. Если пренебречь скоростными напорами в этих сечениях (они малы, согласно допущению 1), то

$$Z_1 = Z_2 + \sum h_{\text{пр}}, \quad (448)$$

поскольку $Z_1 - Z_2 = Z$, то

$$Z = \sum h_{np},$$

где

$$\sum h_{np} = \sum \xi \frac{v^2}{2g}, \quad (449)$$

где v — средняя скорость;

ξ — коэффициент потерь при истечении под уровень.

Почему же выбрали для рассмотрения 3 сечения? Попробуем выяснить.

Если рассмотреть потери напора с точки зрения потерь между сечениями 1—1 и 3—3, то они выражаются по формуле (450):

$$h_{np} = \xi_{o.k.} \frac{v^2 C}{2g}. \quad (450)$$

С другой стороны, они являются потерями с точки зрения сечений 3—3 и 2—2, то есть

$$h_{в.р.} \text{ (второй резервуар)} = a_c \frac{v^2 C}{2g}. \quad (451)$$

Приравняв (450) и (451), находим

$$v_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \xi_{o.k.}}} \times \sqrt{2gZ}. \quad (452)$$

Обозначив

$$v = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \xi_{o.k.}}}, \quad (453)$$

имеем:

$$v_c = v \sqrt{2gZ}, \quad (454)$$

где a_C — коэффициент Кориолиса в сжатом сечении;

$\xi_{o,k}$ — коэффициент сопротивления при истечении через острую кромку стенки резервуара.

Остается определить расход при таком истечении $Q = \omega_C v_C$; поскольку здесь $\omega_C = E\omega$, то, сопоставив это и (454), получим:

$$Q = Ev\omega\sqrt{2gZ}, \quad (455)$$

обозначив $\mu = Ev$, определяем, что

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gZ}. \quad (456)$$

В формулах (454)—(456) Z — перепад уровней до и после отверстия. Исходя из практики, можно заключить, что μ в (456) и μ_0 в (443) ничем не отличаются.

2. Истечение через большое отверстие

Отверстие считают малым, когда его вертикальные размеры $d < 0,1H$. Большим отверстием будем считать такое отверстие, для которого тот же $d > 0,1H$. Рассматривая истечение через малое отверстие, практически пренебрегли различием скоростей в разных точках сечения струи. В этом случае поступить так же мы не сможем.

Задача та же: определить расход и скорости в сжатом сечении.

Однако из-за невозможности пренебречь различием скоростей, поле маневра несколько сузилось. Чем больше достоверность гидравлических данных струи, например, коэффициентов скорости v и сжатия E , тем точнее мы можем определить расход Q и среднюю скорость v_C . Но таких данных у нас нет.

Поэтому расход определяют следующим способом: выделяют бесконечно малую горизонтальную высоту dz . Таким образом,

получается горизонтальная полоса с переменной длиной b_z . Тогда, интегрировав по длине, можно найти элементарный расход:

$$dQ = \mu b_z \sqrt{2gZ} dz, \quad (457)$$

где Z — переменный напор по высоте отверстия, на такую глубину погружен верх выбранной полосы;

μ — коэффициент расхода через отверстие;

b_z — переменная длина (или ширина) полосы.

Расход Q (457) можем определить, если $\mu = \text{const}$ и известна формула $b_z = f(z)$. В общем случае, расход определяют по формуле

$$Q = \mu \sqrt{2gZ} \int_{H_1}^{H_2} b_z \sqrt{Z} dz. \quad (458)$$

Если форма отверстия прямоугольная, то $b_z = b = \text{const}$, интегрировав (458), получаем:

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left(H_2^{\frac{3}{2}} - H_1^{\frac{3}{2}} \right), \quad (459)$$

где H_1, H_2 — напоры на уровнях соответственно у верхней и у нижней кромок отверстия.

$H_{\text{ц}}$ — напор над центром отверстия,

d — высота прямоугольника.

Формула (459) имеет более упрощенный вид:

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH_{\text{ц}}},$$

В случае истечения через круглое отверстие пределами интегрирования в (458) служат $H_1 = H_{\text{ц}} - r$, $H_2 = H_{\text{ц}} + r$, $Z = H_{\text{ц}} - r \cos v$; $dz = r \sin v dv$; $b_z = 2r \sin v$.

Избегая математического излишества, приведем конечную формулу:

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH_{\text{ц}}}. \quad (460)$$

Как видно из сравнений формул (459), (460) и (443), особой разницы в формулах для расхода нет, только при больших и малых отверстиях коэффициенты расхода разные.

3. Коэффициент расхода системы

Требуется выяснить вопрос о расходе, если истечение происходит по трубам, соединенным в одну систему, но имеющих разные геометрические данные. Здесь нужно рассмотреть каждый случай отдельно. Приведем некоторые из них.

1. Истечение происходит между двумя резервуарами при постоянном напоре через систему труб, у которых разные диаметры и длина. В этом случае на выходе системы $E = 1$, следовательно, численно $\mu = v$, где E, μ, v — коэффициенты соответственно сжатия, расхода и скорости.

2. Истечение происходит через систему труб с разными ω (площадь поперечного сечения): при этом определяют суммарный коэффициент сопротивления системы, который состоит из таких же коэффициентов, но для каждого участка отдельно.

Истечение происходит в атмосферу через незатопленное отверстие. В этом случае

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH}, \quad (461)$$

где $H = z = \text{const}$ — напор;

μ, ω — коэффициент расхода и площадь сечения.

Для того, чтобы рассчитать расход, нужно в (461) вместо коэффициента расхода μ подставить коэффициент расхода системы:

$$\mu_{сист} = \frac{1}{\sqrt{x + \zeta_{сист}}}, \quad (462)$$

поскольку в (462) коэффициент Кориолиса (или кинетической энергии) x отнесен к выходному сечению, где, как правило $x \approx 1$.

Такое же истечение происходит через затопленное отверстие

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gz}, \quad (463)$$

в этом случае расход определяется по формуле (463), где $\mu = \mu_{сист}$ по формуле (464). Как в формуле (461), так и в (463), ω — площадь выходного сечения. При отсутствии или незначительности скорости в приемнике или трубе коэффициент расхода заменяется на

$$\mu_{сист} = \frac{1}{\sqrt{\zeta_{сист}}}. \quad (464)$$

Нужно только иметь в виду, что при затопленном отверстии $\zeta_{вых} = 1$, и этот $\zeta_{вых}$ входит в $\zeta_{сист}$.

Содержание

ЛЕКЦИЯ № 1. Гидростатика	3
1. Основные физические свойства жидкости	3
2. Силы, действующие в жидкости	11
3. Гидростатическое давление и его основные свойства	12
4. Поверхности равного давления и их свойства	16
ЛЕКЦИЯ № 2. Однородная несжимаемая жидкость	20
1. Равновесие однородной несжимаемой жидкости под воздействием силы тяжести	20
2. Гидравлический пресс и гидравлический аккумулятор	28
ЛЕКЦИЯ № 3. Условия устойчивого равновесия и плавания тел	30
1. Определение силы давления покоящейся жидкости на плоские поверхности. Центр давления	30
2. Определение силы давления, в расчетах гидротехнических сооружений (плотины, плоские затворы и прочее)	32
3. Общий прием определения сил на криволинейные поверхности (давление на цилиндрические поверхности). Закон Архимеда	34

4. Закон Архимеда. Условия плавучести погруженных тел	39
5. Метацентр и метacentрический радиус	41
ЛЕКЦИЯ № 4. Кинематика жидкости	44
1. Методы определения движения жидкости	44
2. Вихревые и потенциальные (ламинарное) движение жидкой частицы	49
3. Уравнение неразрывности жидкости	55
4. Характеристики потока жидкости	59
ЛЕКЦИЯ № 5. Динамика невязкой жидкости	64
1. Дифференциальные уравнения движения невязкой жидкости (уравнение Эйлера)	64
2. Формы Громеки уравнения движения невязкой жидкости	69
3. Уравнение Бернулли	71
ЛЕКЦИЯ № 6. Динамика вязкой жидкости	84
1. Уравнения движения вязкой жидкости	84
2. Деформация в движущейся вязкой жидкости: напряжение и скорость деформации	87
3. Уравнение Бернулли для движения вязкой жидкости	90
4. Гидравлический и пьезометрический уклоны	94
5. Уравнение Бернулли для неустановившегося движения вязкой жидкости	95

ЛЕКЦИЯ № 7. Режимы движения жидкости.

Уравнение Рейнольдса	100
1. Ламинарный и турбулентный режимы движения жидкости. Число Рейнольдса	100
2. Из теории турбулентного движения. Осредненные скорости. Пульсационные составляющие	103
3. Распределение скоростей при равномерном установившемся движении. Ламинарная пленка	106
4. Распределение скоростей в «живом» сечении потока	108
5. «Шероховатость» и «гладкость» стенок	112

ЛЕКЦИЯ № 8. Вопросы потери напора

(удельной энергии)	114
1. Параметры потока, от которых зависит потеря напора. Метод размерностей. Число Эйлера	115
2. Равномерное движение и коэффициент сопротивления по длине	119
3. Равномерное движение, средняя скорость и расход потока. Формула Шези	120
4. Гидравлическое подобие. Основы гидродинамического подобия	122
5. Распределение касательных напряжений при равномерном движении	127

ЛЕКЦИЯ № 9. Вопросы потери напора

1. Ламинарное движение	131
------------------------------	-----

2. Турбулентный равномерный режим движения потока	137
3. Коэффициент Шези в «квадратичной области». Формула Павловского	142
4. Неравномерное движение	143

ЛЕКЦИЯ № 10. Движение жидкости

в напорных трубопроводах

при неустановившемся движении	161
1. Гидравлический удар	161
2. Скорость распространения волны гидравлического удара	168
3. Дифференциальное уравнение неустановившегося движения	171

ЛЕКЦИЯ № 11. Истечение жидкости

1. Истечение жидкости при постоянном напоре через малое отверстие	175
2. Истечение через большое отверстие	184
3. Коэффициент расхода системы	186