КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
АНАЛИТИЧЕСКАЯ
ГЕОМЕТРИЯ

Щербакова Ю. В.

Данное учебно-методическое пособие представляет собой краткое изложение основного материала лекций по курсу «Аналитическая геометрия», предназначенного для студентов средних специальных и высших технических учебных заведений. Представленный в пособии материал поможет студентам подготовиться к сессии и успешно сдать экзамен по данной дисциплине.

Лекция №1. Аналитическая геометрия на плоскости

1. Метод координат

Направленные отрезки

Понятия отрезка и его длины известны из элементарной геометрии. **Отрезок** — это часть прямой, ограниченная двумя точками. Длина отрезка есть положительное число, получаемое измерением этого отрезка с помощью некоторого заранее выбранного отрезка — единицы масштаба. Отрезок, ограниченный точками А и В, а также его длину, обозначают АВ или ВА. Во многих вопросах математики и физики имеет значение **направление** отрезка, например если отрезок рассматривается как путь, который проходит движущаяся точка. Чтобы охарактеризовать направление отрезка, одну из двух ограничивающих его точек принимают за начало отрезка, а другую — за его конец; направлением отрезка считают направление от начала к концу. Отрезок, на котором указано направление (т. е. сказано, какая из двух граничных точек считается началом и какая — концом), называется **направленным отрезком**. Условимся обозначать направленный отрезок двумя буквами с чертой над ними, помещая на первом месте букву, указывающую начало отрезка. Так, например, направленный отрезок, для которого точка А является начальной, а В — конечной, будем обозначать $\overline{AB}$. Заметим, что направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ различны, так как направления их противоположны. Если рассматривать направленные отрезки, расположенные на одной прямой, то их направления можно характеризовать знаками + и –. Для этого одно из двух противоположных направлений этой прямой (безразлично, какое) назовем положительным, а другое —

отрицательным. На чертеже положительное направление условимся отмечать стрелкой (направление слева направо принято за положительное). Прямая, на которой выбрано положительное направление, называется **осью**. Длина направленного отрезка, расположенного на оси, взятая с определенным знаком, называется **величиной** направленного отрезка оси. При этом знак выбирается положительный, если направление отрезка совпадает с положительным направлением оси, и отрицательный, если направление отрезка противоположно положительному направлению оси. Так, например, величина направленного отрезка $\overline{AC}$ положительна, а величина отрезка $\overline{CB}$ отрицательна. Очевидно, длина направленного отрезка равна модулю его величины. Условимся длину направленного отрезка $\overline{AB}$ обозначать через AB, а его величину — символом $вел\overline{AB}$. Из определения величины направленного отрезка оси следует, что величины отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ отличаются знаком:

$$вел\overline{AB} = -вел\overline{BA}.$$

Возьмем на некоторой оси три точки A, B, C и выясним, чему будет равна сумма величин направленных отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$. Мы сейчас покажем, что **при любом расположении точек A, B и C на оси сумма величин направленных отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ будет равна величине направленного отрезка $\overline{AC}$:**

$$вел\overline{AB} + вел\overline{BC} = вел\overline{AC}, (1)$$

т. е. сумма величин направленных отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, расположенных на оси так, что конец первого из них является началом второго, равна величине направленного отрезка $\overline{AC}$, началом которого является начало первого, а концом — конец второго направленного отрезка.

Для доказательства равенства (1) предположим сначала, что точка B располагается между точками A и C. Рассматривая направленный отрезок как путь, проходимый движущейся точкой, мы можем сказать, что в этом случае подвижная точка, пройдя путь $\overline{AB}$, продолжает движение по пути $\overline{BC}$ в том же направлении. Тогда длина отрезка $\overline{AC}$, очевидно, равна сумме длин отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, а величины всех трех направленных отрезков имеют одинаковые знаки, так как все три отрезка одинаково направлены. Следовательно:

$$вел\,\overline{AB} + вел\,\overline{BC} = вел\,\overline{AC}.$$

Таким образом, если точка В лежит на отрезке $\overline{AC}$, то равенство (1) справедливо. Допустим теперь, что точка В располагается вне отрезка $\overline{AC}$, либо на продолжении отрезка за точку С, либо на продолжении его за точку А. В каждом из этих случаев подвижная точка, пройдя путь $\overline{AB}$, продолжает движение по пути $\overline{BC}$ в противоположном направлении. Ясно, что теперь длина отрезка $\overline{AC}$ равна разности длин двух других отрезков (AC = AB – – BC, либо AC = BC – AB). Очевидно, что направление отрезка $\overline{AC}$ будет совпадать с направлением того из отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, который имеет большую длину. Поэтому величина отрезка $\overline{AC}$ будет иметь тот же знак, что и величина более длинного отрезка. Следовательно, величина направленного отрезка $\overline{AC}$ может быть найдена по правилу сложения относительных чисел $вел\,\overline{AB}$ и $вел\,\overline{BC}$. Таким образом, и при любом расположении точки В вне отрезка $\overline{AC}$ будем иметь:

$$вел\,\overline{AB} + вел\,\overline{BC} = вел\,\overline{AC}.$$

Остается заметить, что равенство (1) будет справедливо и в том случае, когда некоторые точки будут совпадать. Если будут совпадать точки А и С, то

$$вел\,\overline{AB} + вел\,\overline{BC} = -вел\,\overline{AB} + вел\,\overline{BA} = 0,$$

но и $вел\overline{AC} = 0$. Следовательно, равенство (1) будет справедливо. Если бы в равенстве (1) стояли не величины а длины направленных отрезков, то оно было бы справедливо только в том случае, когда точка В лежит на отрезке $\overline{AC}$, и теряло бы силу при любом другом расположении точки В. Пользуясь равенством (1), легко доказать, что при любом числе точек А, B_1, B_2, ..., B_n, С и произвольном их расположении на оси мы будем иметь:

$$вел\overline{AB_1} + вел\overline{B_1B_2} + \ldots + вел\overline{B_nC} = вел\overline{AC}$$

т. е. сумма величин направленных отрезков, для которых начало каждого следующего отрезка совпадает с концом предыдущего, равна величине направленного отрезка, начало которого совпадает с началом первого, а конец — с концом последнего из направленных отрезков.

Координаты на прямой линии

Возьмем на прямой линии некоторую произвольную точку О (от латинского origo — начало), относительно которой будем определять положения всех точек прямой. Ясно, что положение любой точки Р прямой линии будет вполне определяться направленным отрезком $\overline{OP}$, каждой точке прямой соответствует определенный направленный отрезок с началом в точке О и концом в рассматриваемой точке Р и, обратно, каждому направленному отрезку с началом в точке О соответствует одна точка Р прямой линии — конец этого отрезка. Установим теперь на прямой положительное направление и выберем единицу масштаба m (положительное направление выбрано слева направо). Тогда положение любой точки Р прямой линии можно будет определить **числом** — величиной направленного отрезка $\overline{OP}$. Это число, определяющее положение точки, называется ее **координатой**. Итак, **величина направленного отрезка $\overline{OP}$ является координатой точки Р прямой линии**. Обозначая координату точки Р буквой x, имеем:

$$x = вел\overline{OP}.$$

Зная точку P, легко найти ее координату: она равна величине направленного отрезка $\overline{OP}$. Обратно, по заданной координате x можно построить единственную точку: она будет концом направленного отрезка $\overline{OP}$, величина которого равна x. Если на прямой линии отмечена некоторая точка O, указано положительное направление и, кроме того, выбрана единица масштаба, то мы будем говорить, что на прямой установлена система координат. Точка O, являющаяся началом рассматриваемых направленных отрезков, называется **началом координат**, а данная прямая — **осью координат**. Начало координат делит ось координат на две части; полупрямая, идущая от точки O в положительном направлении, называется **положительной полуосью**, полупрямая, идущая от O в отрицательном направлении, — **отрицательной полуосью**. Очевидно, точки положительной полуоси имеют положительные координаты (точки, лежащие вправо от O), точки отрицательной полуоси — отрицательные координаты; точка O имеет координату, равную нулю. В тексте условимся координату точки писать в скобках рядом с буквой, обозначающей эту точку: P(x).

Расстояние между двумя точками на прямой линии

Пусть нам даны в некоторой системе координат две точки: $A(x_1)$ и $B(x_2)$. Посмотрим, как выразится расстояние AB между этими точками через их координаты. На основании равенства (1) мы можем написать, что

$$вел\overline{OA} + вел\overline{AB} = вел\overline{OB},$$

откуда $вел\overline{AB} = вел\overline{OB} - вел\overline{OA}$, так как $\underline{вел\overline{OA} = x}$, $вел\overline{OB} = x_2$, то

$$вел\overline{AB} = x_2 - x_1. \ (2)$$

Таким образом, **чтобы получить величину направленного отрезка оси, нужно из координаты его конца вычесть координату его на-**

чала. Расстояние между точками А и В равно длине направленного отрезка $\overline{AB}$. Следовательно,

$$AB = |x_2 - x_1|. \quad (2')$$

т. е. **расстояние между двумя точками равно абсолютной величине разности координат этих точек**.

Прямоугольные координаты на плоскости

Укажем способ, позволяющий определять положение точек плоскости с помощью чисел. Возьмем две взаимно перпендикулярные прямые и на каждой из них установим положительное направление. Эти прямые, относительно которых мы будем определять положение точек плоскости, называются **осями координат**. Оси координат обычно располагают так, одну — горизонтально и положительное направление на ней выбирают слева направо, а другую — вертикально и положительное направление на ней — снизу вверх. Одна из осей (обычно горизонтальная) называется **осью абсцисс** (ось O_x), а другая — **осью ординат** (ось O_y). Точка пересечения осей координат называется **началом координат** (начало координат обозначено буквой О). Выберем единицу масштаба (мы всегда будем предполагать, что на обеих осях координат выбрана одна и та же единица масштаба). Теперь положение любой точки плоскости можно будет определить числами — координатами этой точки. Действительно, всякой точке М плоскости соответствуют на осях координат две точки Р и Q, являющиеся ее проекциями на эти оси и, обратно, зная точки Р и Q на осях координат, можно построить единственную точку М на плоскости, для которой Р и Q являются проекциями на эти оси. Таким образом, определение положения точки М плос-кости сводится к определению положений ее проекций Р и Q на координатные оси. Но мы уже знаем, что положение точки на оси вполне определяется ее координатой. Пусть х — координата точки Р на оси абсцисс ($x = вел\overline{OP}$) и у — координата точки Q на оси ординат ($y = вел\overline{OQ}$). Числа x и y вполне определяют положение точки M на плоскости и называются координатами точки; при этом x называется абсциссой точки M, а y — ее ординатой. Таким образом, **абсциссой** точки называется величина направленного отрезка оси O_x, началом которого является начало координат, а концом — проек-ция точки на эту ось; **ординатой** точки называется величина направленного отрезка оси O_y, началом которого является начало координат, а концом — проекция точки на ось ординат. Итак, положение любой точки плоскости вполне определяется заданием пары чисел x и y, первое из которых является абсциссой точки, а второе — ее ординатой. Координаты точки условимся писать в скобках, рядом с буквой, обозначающей эту точку, ставя на первом месте абсциссу, а на втором — ординату и разделяя их запятой: M(x, y). При расположении координатных осей для всех точек плоскости, лежащих вправо от оси O_y (оси ординат), абсцисса x положительна, а для точек, лежащих влево от оси O_y, — отрицательна. Точки самой оси O_y имеют абсциссу, равную нулю. Совершенно так же точки плоскости, лежащие выше оси O_x (оси абсцисс), имеют положительную ординату y, а точки, лежащие ниже оси O_x, — отрицательную. Точки самой оси O_x имеют ординату, равную нулю. Начало координат имеет координаты (0, 0). Оси координат делят плоскость на четыре части, называемые **четвертями** или **квадрантами** (иногда их также называют **координатными углами**. Часть плоскости, заключенная между положительными полуосями O_x и O_y, называется **первым квадрантом**. Дальше нумерация квадрантов идет против часовой стрелки. Для всех точек I квадранта $x > 0$, $y > 0$; для точек II квадранта $x < 0$ и $y < 0$; в III квадранте $x < 0$, $y < 0$ и в IV квадранте $x > 0$, $y < 0$. Координаты, которые принимаются здесь для определения положения точки плоскости, называются **прямоугольными координатами**, так как точка M плоскости получается пересечением двух прямых PM и QM, встречающихся под прямым углом, а также декартовыми по имени математика и философа Декарта. Декартова прямоугольная система координат не является единственной координатной системой, позволяющей определять положения точек плоскости, но она является наиболее простой. Таким образом, в выбранной системе координат каждой точке плоскости соответствует вполне определенная пара координат x и y и, обратно, всякая пара действительных чисел x, y определяет на плоскости единственную точку, абсцисса которой равна x, а ордината y. Поэтому задать точку — значит задать ее координаты; найти точку — значит найти ее координаты.

Расстояние между двумя точками на плоскости

Рассмотрим задачу о расстоянии между двумя точками.

Пусть в выбранной на плоскости прямоугольной системе координат заданы две точки A(x_1, y_1) и B(x_2, y_2). Выразим расстояние d между этими двумя точками через их координаты. Найдем проекции точек A и B на координатные оси.

Будем иметь:

$$вел\overline{OP_1} = x_1,\ вел\overline{OQ_1} = y_1,$$

$$вел\overline{OP_2} = x_2,\ вел\overline{OQ_2} = y_2.$$

Через одну из данных точек, например A, проведем прямую параллельно оси абсцисс до пересечения в точке C с прямой P_2B.

Из прямоугольного треугольника ACB получим

$$d^2 = AC^2 + CB^2.$$

Здесь AC и CB — длины сторон треугольника ACB. Но так как $AC = P_1P_2 = |x_2 - x_1|$ и $CB = Q_1Q_2 = |y_2 - y_1|$, то $d_2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$, или $d_2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, откуда

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. (3)$$

Ясно, что здесь нужно брать арифметическое значение корня. Таким образом, **расстояние между двумя данными точками равно корню квадратному из суммы квадратов разностей одноименных координат этих точек**.

Деление отрезка в данном отношении

Пусть заданы две точки A и B. Проведем через них прямую и установим на ней произвольно положительное направление. Пусть M — некоторая точка этой оси. Где бы ни располагалась точка M — внутри отрезка $\overline{AB}$ или на его продолжении в ту или другую сторону — условимся говорить, что она делит направленный отрезок $\overline{AB}$. При этом если точка M лежит между A и B, будем говорить, что она делит отрезок $\overline{AB}$ внутренним образом; если же точка M будет лежать на продолжении отрезка, то будем говорить, что она делит отрезок внешним образом. Назовем отношением, в котором точка M делит направленный отрезок $\overline{AB}$, число

$$\lambda = \frac{вел\,\overline{AM}}{вел\,\overline{MB}}.$$

Если точка M делит отрезок $\overline{AB}$ внутренним образом, то отрезки $\overline{AM}$ и $\overline{MB}$ имеют одно и то же направление, а величины их — один знак и, следовательно, отношение λ положительно. Если точка M совпадет с началом A отрезка, то $\lambda = 0$; по мере приближения делящей точки M к концу B отрезка λ отношение неограниченно возрастает, так как знаменатель $вел\,\overline{MB}$ стремится к нулю. Случай совпадения делящей точки M с концом B отрезка следует исключить, так как отношение в этом случае теряет смысл (знаменатель дроби обращается в нуль). Если точка M делит отрезок внешним образом, то при любом ее расположении отрезки $\overline{AM}$ и $\overline{MB}$ противоположно направлены, а величины их имеют противоположные знаки и, следовательно, отношение λ, в котором точка M делит направленный отрезок $\overline{AB}$, отрицательно. При этом ясно, что если делящая точка М лежит вне отрезка $\overline{AB}$ за его началом, то абсолютная величина отношения λ меньше единицы; если же М лежит на продолжении отрезка за его концом, то $|\lambda|>1$ (заметим, что ни при каком положении делящей точки М отношение λ не может быть равным -1). Таким образом, каждому положению точки М на прямой (кроме случая, когда М совпадает с концом рассматриваемого отрезка) соответствует определенное значение отношения λ. Задачу о делении отрезка в данном отношении следует понимать так: даны две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ и дано отношение λ, в котором некоторая точка $M(x, y)$ делит направленный отрезок $\overline{AB}$; требуется найти координаты x y точки М. Пусть P_1, S, P_2 суть проекции точек А, М, В на ось O_x.

Прямые AP_1, MS и BP_2 параллельны и, следовательно, рассекают прямую АВ и ось O_x на пропорциональные части, так что

$$\frac{AM}{MB}=\frac{P_1S}{SP_2}.$$

Аналогичным равенством связаны и величины направленных отрезков $\overline{AM}$, $\overline{MB}$, $\overline{P_1S}$ и $\overline{SP_2}$:

$$\frac{вел\,\overline{AM}}{вел\,\overline{MB}}=\frac{вел\,\overline{P_1S}}{вел\,\overline{SP_2}}$$

Действительно, модули обеих частей данного равенства, как только что показано, одинаковы. Знаки же их тоже совпадают, так как при любом расположении точки М относительно отрезка $\overline{AB}$ (внутри или вне его с той или другой стороны) точка S всегда будет иметь аналогичное расположение относительно отрезка $\overline{P_1P_2}$. Так как $вел\,\overline{P_1S}=x-x_1$, $вел\,\overline{SP_2}=x_2-x$ и по условию $\frac{вел\,\overline{AM}}{вел\,\overline{MB}}=\lambda$ то пропорция заменится равенством $\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda$, откуда :

$$x-x_1=\lambda(x_2-x) \text{ или } x-x_1=\lambda x_2-\lambda x, \text{ т. е. } x+\lambda x=x_1+\lambda x_2.$$

Выноса в левой части x за скобку, получим: $x(1+\lambda) = x_1 + \lambda x_2$ и, наконец,

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}.$$

Чтобы получить ординату y точки M, нужно проектировать точки A, M, B на ось ординат; аналогично предыдущему получим:

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Из приведенных формул следует, что каждому значению λ соответствует некоторая точка M прямой AB. Исключение представляет значение $\lambda = -1$, при котором формулы теряют смысл. Полагая в приведенных формулах $\lambda = 1$, найдем координаты середины отрезка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

т. е. координаты середины отрезка равны полусуммам одноименных координат его начала и конца.

Угол между двумя осями

Пусть на плоскости даны две оси l_1, и l_2, пересекающиеся в точке S. Условимся понимать угол между двумя осями l_1, и l_2, заданными в указанном порядке, как угол, на который надо повернуть ось l_1, вокруг точки S, чтобы ее положительное направление совпало с положительным направлением оси l_2. Этот угол будем обозначать $\left(l_1,\hat{\ }l_2\right)$. Заметим, что угол $\left(l_1,\hat{\ }l_2\right)$ можно также рассматривать как угол между двумя лучами, выходящими из точки S в положительных направлениях осей l_1, и l_2. Измеряя угол, как обычно, градусами или радианами, как и в тригонометрии, полученное число будем брать со знаком + или – в зависимости от направления поворота: знак +, если угол получен поворотом оси l_1 против часовой стрелки, и знак – , если поворот этой оси совершается по часовой стрелке. Ось l_1, не единственным образом можно повернуть так, чтобы ее положительное направление совпало с положительным направлением оси l_1. Действительно, если мы повернули ось l_1, на такой угол, то после этого можно еще дополнительно повернуть ее на любое число полных оборотов по или против часовой стрелки так, что положительное направление ее по-прежнему будет совпадать с положительным направлением оси l_2. Таким образом, для угла $\left(l_1,\hat{l_2}\right)$ между осями можно указать не одно, бесчисленное множество значений. Если одно из этих значений обозначить через ϖ, то любое значение угла может быть получено по формуле

$$\left(l_1,\hat{l_2}\right)=\varpi+2n\pi ,$$

где n — любое целое число (положительное, отрицательное или нуль).

В дальнейшем, говоря об угле между двумя осями, мы обычно будем иметь в виду какое-нибудь одно из всевозможных его значений; чаще всего — наименьшее по модулю значение. В наших рассуждениях мы предполагали, что оси l_1, и l_2 пересекаются. В случае параллельности осей угол между ними будем считать равным нулю (или вообще $2n\pi$), если они имеют одинаковые положительные направления, и π (или вообще $\pi + 2n\pi$), если их положительные направления противоположны. По аналогии с изложенным условимся понимать угол между осью и направленным отрезком как угол, на который надо повернуть ось, чтобы ее положительное направление совпало с направлением отрезка (в случае надобности условимся продолжать отрезок до пересечения с осью).

Основные положения теории проекций

Ранее уже отмечалось, что проекцией точки M на ось называется основание m перпендикуляра, опущенного из точки M на данную ось. Пусть на плоскости дан направленный отрезок $\overline{AB}$ и некоторая ось l (ось проекций). Будем рассматривать этот отрезок как путь, проходимый движущейся точкой M. При движении точки M по отрезку $\overline{AB}$ ее проекция m на ось опишет некоторый направленный отрезок $\overline{ab}$, называемый геометрической проекцией направленного отрезка $\overline{AB}$ на ось. Однако в дальнейшем основную роль будет играть не геометрическая проекция отрезка, а ее величина, называемая проекцией отрезка на ось. **Итак, проекцией направленного отрезка на ось называется величина направленного отрезка оси, началом которого является проекция начальной точки проектируемого отрезка, а концом — проекция конечной точки этого отрезка.** Заметим, что проекция направленного отрезка является числом (положительным, отрицательным или равным нулю). Условимся проекцию направленного отрезка $\overline{AB}$ на ось l обозначать $np_l\overline{AB}$ или, короче, $np\overline{AB}$. Установим основные положения теории проекций. Проекция направленного отрезка $\overline{AB}$ на ось l равна произведению длины AB этого отрезка на косинус угла α между осью проекции и данным отрезком:

$$np_l\overline{AB} = AB\cos\alpha\,.$$

Справедливость данной формулы достаточно доказать в предположении, что ось проекций проходит через начало проектируемого отрезка. Действительно, проекция отрезка $\overline{AB}$ не изменится, если ось проекций перенести параллельно самой себе. При этом угол между осью проекций и направленным отрезком также со-хранит прежнее значение. Пусть ось проекций l проходит через начало проектируемого отрезка $\overline{AB}$. Для доказательства приведенного равенства построим тригонометрическую окружность с центром в точке A радиусом, равным длине отрезка $\overline{AB}$, и будем считать, что ее начальный диаметр направлен по оси l. По определению косинуса имеем:

$$\cos\alpha = \frac{вел\,\overline{Ab}}{Ab}.$$

Так как $вел\,\overline{Ab} = пр_l\,\overline{AB}$, то

$$\cos\alpha = \frac{пр_l\,\overline{AB}}{AB},$$

откуда

$$пр_l\,\overline{AB} = AB\cos\alpha.$$

Равенство доказано.

Предположим теперь, что направленный отрезок $\overline{AB}$ лежит на некоторой оси u; пусть φ — угол между осью проекций t и осью u. **Проекция направленного отрезка $\overline{AB}$ на ось l равна произведению величины этого отрезка на косинус угла φ между осью проекций l и осью u, на которой дан отрезок**:

$$пр_l\,\overline{AB} = вел\,\overline{AB}\cos\varphi.$$

Заметим, что в этой формуле проекция выражена через величину направленного отрезка, расположенного на некоторой оси, Докажем приведенное равенство. В том случае, когда направление отрезка $\overline{AB}$ совпадает с положительным направлением оси, равенство непосредственно следует из уже доказанного равенства $пр_l\,\overline{AB} = AB\cos\alpha$. Действительно, в рассматриваемом случае угол

φ является в то же время углом α между осью проекций и отрезком; следовательно:

$$np_l \overline{AB} = AB\cos\varphi = AB\cos\varphi.$$

Учитывая, кроме того, что в данном случае $вел\overline{AB} = AB$, получим:

$$np_l \overline{AB} = вел\overline{AB}\cos\varphi.$$

Если же направление отрезка $\overline{AB}$ противоположно направлению оси u, то угол α между осью проекций и отрезком $\overline{AB}$ равен $\varphi+\pi$ действительно, если повернуть ось l сначала на угол φ, а затем дополнительно на угол α, то ее положительное направление совпадет с отрицательным направлением оси u, т. е. с направлением отрезка $\overline{AB}$. Следовательно:

$$np_l \overline{AB} = AB\cos\alpha = AB\cos(\varphi+\pi) = -AB\cos\varphi.$$

Учитывая, что в рассматриваемом случае $вел\overline{AB} = -AB$, получим:

$$np_l \overline{AB} = велAB\cos\varphi.$$

Таким образом, равенство доказано полностью. Возьмем теперь произвольную ломаную линию ABCDEF. Будем рассмат-ривать эту ломаную как траекторию точки M, описывающей последовательно все звенья ломаной от начальной ее точки A до конечной F. При этом на ломаной установится направление обхода, а звенья ее можно будет рассматривать как направленные отрезки. Такую ломаную будем называть **направленной** ломаной. Направленную ломаную, соединяющую последовательно точки A, B, C, D, E и F, обозначим через $\overline{ABCDEF}$. При перемещении точки M по направленной ломаной $\overline{ABCDEF}$ проекция этой точки на ось переместится по оси из точки a — проекции точки A — в точку f — проекцию точки F. Направленный отрезок $\overline{af}$ оси проекций называется геометрической проекцией направленной ломаной $\overline{ABCDEF}$ на ось. Величину геометрической проекции направленной ломаной назовем проекцией направленной ломаной. Таким образом, **проекцией направленной ломаной** на ось называется величина направленного отрезка оси, началом которого является проекция начальной точки проектируемой ломаной, а концом — проекция конечной точки этой ломаной. Заметим, что проекция направленной ломаной на ось является **числом**. Легко доказать, что **проекция направленной ломаной равна сумме проекций ее звеньев**. Действительно, проектируя на ось каждое звено ломаной $\overline{ABCDEF}$, мы получим:

$$вел\overline{af} = вел\overline{ab} + вел\overline{bc} + вел\overline{cd} + вел\overline{de} + вел\overline{ef}.$$

Или, если обозначить проекцию ломаной через $пр\overline{ABCDEF}$, $пр\overline{ABCDEF} = пр\overline{AB} + пр\overline{BC} + пр\overline{CD} + пр\overline{DE} + пр\overline{EF}$.

Далее ясно, **что проекция направленной ломаной не зависит от ее формы, а зависит лишь от положения ее начальной и конечной точек; поэтому проекции двух направленных ломаных с общими началом и концом равны между собой**. Назовем **замыкающим отрезком** ломаной линии направленный отрезок, началом которого является начальная точка рассматриваемой ломаной, а концом — конечная ее точка. Очевидно, **проекция направленной ломаной равна проекции ее замыкающего отрезка**. Если ломаная линия замкнута, т. е. ее начало и конец совпадают, то ее **проекция равна нулю**.

Проекции направленного отрезка на оси координат

Дадим формулы, выражающие проекции направленного отрезка на координатные оси. Пусть известны длина d направленного отрезка $\overline{AB}$ и угол α между осью O_x и этим отрезком. Проекцию отрезка $\overline{AB}$ на ось Ox получим непосредственно по формуле $np_l \overline{AB} = AB\cos\alpha$. Чтобы выразить проекцию отрезка $\overline{AB}$ на ось O_y, заметим, что угол между осью O_y и отрезком $\overline{AB}$ равен $\alpha - \frac{\pi}{2}$ (действительно, если повернуть ось O_y сначала на угол $-\frac{\pi}{2}$, а затем еще на угол α, то ее положительное направление совпадет с направлением отрезка $\overline{AB}$). Тогда

$$np_y \overline{AB} = d\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = d\sin\alpha .$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} np_x \overline{AB} &= d\cos\alpha \\ np_y \overline{AB} &= d\sin\alpha \end{aligned}\right\}$$

Предположим теперь, что направленный отрезок $\overline{AB}$ расположен на некоторой оси u. В таком случае проекции этого отрезка на оси координат можно выразить также через его величину и угол φ между осью O_x и осью u. По формуле $np_l \overline{AB} = \textit{вел}\,\overline{AB}\cos\varphi$ будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} np_x \overline{AB} &= \textit{вел}\,\overline{AB}\cos\varphi \\ np_y \overline{AB} &= \textit{вел}\,\overline{AB}\sin\varphi \end{aligned}\right\}$$

(так как угол между осью O_y и осью u равен $\varphi - \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\varphi$). Если же направленный отрезок $\overline{AB}$ задан координатами его начала $A(x_1, y)$ и конца $B(x_2, y_2)$, то проекции отрезка на оси координат можно выразить через координаты ограничивающих его точек. Проекция отрезка $\overline{AB}$ на ось O_x равна величине направленного отрезка $\overline{P_1P_2}$ оси O_x.

Так как $\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1$, то $np_x\overline{AB} = x_2 - x_1$.

Совершенно так же $np_x\overline{AB} = y_2 - y_1$. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} np_x\overline{AB} &= x_2 - x_1 \\ np_y\overline{AB} &= y_2 - y_1 \end{aligned}\right\}$$

Заметим, что, проектируя на координатные оси направленный отрезок, идущий из начала координат в произвольную точку M(x, y) плоскости, получим:

$$\left.\begin{aligned} np_x\overline{OM} &= x \\ np_y\overline{OM} &= y \end{aligned}\right\}$$

Таким образом, координаты x, y точки M можно рассматривать как проекции направленного отрезка $\overline{OM}$ на оси координат. В дальнейшем нам понадобится формула, выражающая тангенс угла между осью O_x и направленным отрезком $\overline{AB}$ через координаты его начала и конца. Эту формулу легко получить, используя приведенные выше выражения проекций отрезка $\overline{AB}$ на оси координат.

$$\left.\begin{aligned} d\cos\alpha &= x_2 - x_1 \\ d\sin\alpha &= y_2 - y_1 \end{aligned}\right\}.$$

откуда

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Данная формула определяет тангенс угла между осью O_x и направленным отрезком $\overline{AB}$.

Если изменить направление отрезка на прямо противоположное, то угол между осью O_x и отрезком изменится на π, но тангенс угла, очевидно, сохранит прежнее значение и будет, следовательно, определяться той же формулой.

Площадь треугольника

Даны вершины треугольника: A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) и C(x_3, y_2). Выразим площадь треугольника через координаты его вершин. Пусть CA = d_1, CB = d_2 и φ — угол между направленными отрезками $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$ (т. е. угол, на который нужно повернуть отрезок $\overline{CA}$ вокруг точки C, чтобы его направление совпало с направлением отрезка $\overline{CB}$; как и обычно, угол будем рассматривать со знаком). Площадь треугольника:

$$S = \left|\frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi\right|.$$

Так как $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, где α_1, и α_2 — углы между осью O_x и направленными отрезками $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$, то

$$\frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{1}{2}(d_1 \cos\alpha_1 d_2 \sin\alpha_2 - d_2 \cos\alpha_2 d_1 \sin\alpha_1).$$

Используя формулы (15) предыдущего параграфа, получим:

$$d_1 \cos\alpha_1 = x_1 - x_2,\ d_1 \sin\alpha_1 = y_1 - y_3,$$
$$d_2 \cos\alpha_2 = x_2 - x_3,\ d_2 \sin\alpha_2 = y_2 - y_3.$$

Тогда для площади треугольника будем иметь следующее выражение:

$$S = \frac{1}{2}\left|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)\right|.$$

Пользуясь понятием определителя, можно полученную формулу представить в виде

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_3, y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3, y_2 - y_3 \end{vmatrix}.$$

В данной формуле нужно взять знак + или – ,смотря по тому, будет ли определитель положительным или отрицательным. В частности, если вершина С лежит в начале координат, то $x_3 = y_3 = 0$ и мы получим:

$$S = \pm\frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_3 y_1) = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix}.$$

Если три точки А, В, С лежат на одной прямой, то треугольник АВС вырождается в отрезок и имеет площадь, равную нулю, т. е. S = 0. В этом случае формула для S обратится в равенство

$$0 = \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)\right],$$

или

$$(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) = (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)$$

что можно записать в виде пропорции:

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3}.$$

Последнее равенство связывает координаты трех точек А, В, С тогда и только тогда, когда эти точки лежат на одной прямой. Следовательно, написанная пропорция выражает **условие, при котором три точки лежат на одной прямой**.

Полярные координаты

Для определения положения точки на плоскости, кроме рассмотренной выше декартовой прямоугольной системы координат, довольно часто применяется полярная система координат.

Пусть на плоскости даны некоторая точка O (назовем ее **полюсом**) и проходящая через нее ось OP (назовем ее **полярной осью**), а также указана единица масштаба. Будем определять положение произвольной точки M плоскости по отношению к полюсу и полярной оси. Назовем **полярным радиусом** точки M ее расстояние r = OM от полюса и **полярным углом** точки M угол φ между полярной осью и направленным отрезком $\overline{OM}$; условимся, кроме того, угол φ брать в границах $-\pi < \varphi \le \pi$. Тогда, очевидно, каждой точке M плоскости соответствует единственная пара чисел r, φ (исключением является полюс, для которого r = 0, а φ произвольно). Обратно, каждой паре чисел r, φ (r $\ge$ 0, $-\pi < \varphi \le \pi$) соответствует единственная точка плоскости, для которой r является полярным радиусом, а φ — полярным углом. Полярный радиус и полярный угол точки будем называть ее **полярными координатами**. Полярные координаты условимся записывать в скобках после буквы, обозначающей точку, указывая сначала r, а потом φ: M(r, φ). Можно установить связь между декартовыми и полярными координатами одной и той же точки. Пусть даны декартова система координат и полярная с полюсом в начале координат и полярной осью, совпадающей с осью абсцисс. Обозначим через x и y декартовы координаты произвольной точки M, через r и φ — ее полярные координаты. Мы знаем, что $x = np_x\overline{OM}$, $y = np_y\overline{OM}$ и, с другой стороны, $np_x\overline{OM} = r$, $np_y\overline{OM} = r\sin\varphi$.

Поэтому

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\}.$$

Формулы выражают декартовы координаты точки M через ее полярные координаты. Чтобы найти полярные координаты точки, зная ее декартовы координаты, возведем обе части каждого из равенств в квадрат и затем сложим их почленно. Получим:

$$x^2+y^2=r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi),$$

т. е. $r^2 = x^2 + y^2$, откуда

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Далее получим:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}.$$

По данной формуле определяется тангенс полярного угла φ; при этом получаются два значения φ (напомним, что $-\pi < \varphi \leq \pi$), лежащие в разных четвертях. Так как $y = r\sin\varphi$, то из этих двух значений угла φ нужно выбрать то, для которого синус имеет тот же знак, что и y. Заметим еще, что формулы $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\}$ остаются справедливыми не только при r $\geq$ 0, $-\pi < \varphi \leq \pi$, но и в общем случае. Для доказательства этого нужно воспользоваться выражениями проекций направленного отрезка $\overline{OM}$ на оси координат через его величину r и угол φ между осью O_x и осью, на которой лежит этот направленный отрезок . В этом случае при нахождении r из формулы $r^2 = x^2 + y^2$ радикал можно брать с любым знаком

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

После этого угол φ может быть найден по формуле $\mathrm{tg}\varphi = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$, причем выбирается так, чтобы $\sin\varphi$ имел тот же знак, что и $\frac{y}{r}$

(так как y = rsin).

2. Линии и их уравнения

Составление уравнений заданных линий

В декартовой системе координат каждой точке плоскости соответствует пара действительных чисел и, наоборот, каждой такой паре чисел соответствует определенная точка плоскости. Линиям на плоскости соответствуют уравнения с двумя переменными. Эта связь между линиями и уравнениями позволит свести изучение геометрических свойств линий к исследованию аналитических свойств соответствующих им уравнений. В аналитической геометрии всякую линию рассматривают как геометрическое место точек. В определении линии как геометрического места точек содержится свойство, общее всем ее точкам. Так, например, окружность с центром в точке C и радиусом R можно рассматривать как геометрическое место точек плоскости, отстоящих от C на расстояние R. Это значит, что для всякой точки M, лежащей на окружности, $MC = R$, если же точка M не лежит на окружности, то $MC \neq R$. Возьмем на плоскости какую-нибудь линию, выберем в этой плоскости декартову систему координат и рассмотрим произвольную точку указанной линии. Если эта точка будет перемещаться по данной линии, то ее координаты x и y будут меняться, оставаясь, однако, связанными некоторым условием, характеризующим точки линии. Таким образом, мы получаем некоторое соотношение между x и y, которое будет выполняться только при движении точки по линии и нарушится, если точка сойдет с линии. Следовательно, линии на плоскости соответствует некоторое уравнение с двумя переменными x и y. Такое уравнение между переменными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на линии, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на ней, называется **уравнением данной линии**. Входящие в это уравнение координаты x и y произвольной точки линии называются **текущими координатами**.

Геометрический смысл уравнений

Всякая линия, рассматриваемая как геометрическое место точек, определяется уравнением между координатами ее точек. Обратно, всякое уравнение между двумя переменными x и y, вообще говоря, определяет линию как геометрическое место точек, координаты которых x и y ему удовлетворяют. В самом деле, рассмотрим какое-нибудь уравнение между переменными x и y. Перенося все его члены в левую часть, придадим уравнению следующий вид:

$$F(x, y) = 0, (1)$$

где F означает символ функции двух переменных. Пусть при любом фиксированном числовом значении x уравнение (1), рассматриваемое как уравнение относительно неизвестного y, имеет, например, два действительных корня. Дадим переменной x произвольное числовое значение $x = a$ и найдем из уравнения (1) соответствующие значения y. Для определения y получаем уравнение с одним неизвестным:

$$F(a, y) = 0. (2)$$

Пусть это уравнение имеет корни, например $y = b_1$, $y = b_2$. Даны две точки M_1, и M_2, координаты которых (a, b_1) и (a, b_2) удовлетворяют данному уравнению (1). Дадим теперь переменной x другое числовое значение $x = a'$ и определим соответствующие значения y из уравнения:

$$F(a', y) = 0. (2')$$

Пусть корни этого уравнения будут $y = b'_1$, $y = b'_2$. Отметим две точки M'_1 и M'_2, координаты которых (a', b'_1) и (a', b'_2) удовлетворяют данному уравнению. Если переменное x мы будем непрерывно изменять от значения a до значения a', то прямая LN будет перемещаться параллельно самой себе, отправляясь от положения PQ и приходя в положение $P'Q'$, причем в любом ее положении на ней будут две точки, координаты которых удовлетворяют данному уравнению (1). Таким образом, точки M и M' описывают линию. Эта линия получается в результате двух движений: с одной стороны, движения прямой LN параллельно самой себе (изменение x), а с другой — движения точек M и M' по этой прямой (изменение у). Итак, **уравнение (1) между координатами x и y определяет линию как геометрическое место тех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют данному уравнению**.

Рассмотрим еще некоторые особые виды уравнений.

1. Уравнение может содержать только одну из текущих координат и тем не менее определять некоторую линию.

Пусть, например, дано уравнение $y - 2 = 0$ или $y - 2$. Геометрическим местом точек, ординаты которых равны 2, будет, очевидно, прямая, параллельная оси O_x и отстоящая от нее на расстоянии двух единиц. Аналогично уравнение $x + 1 = 0$ определяет прямую, параллельную оси O_y.

2. Если левая часть уравнения $F(x, y) = 0$ разлагается на множители, то, приравнивая к нулю каждый множитель в отдельности, получим несколько новых уравнений, каждое из которых может определять некоторую линию. Например, уравнение $x^2 - y^2 = 0$ или $(x + y)(x - y) = 0$ определяет пару прямых $x + y = 0$ и $x - y = 0$ — биссектрис координатных углов.

3. В частности, может случиться, что уравнение $F(x, y) = 0$ между координатами x и у определяет геометрическое место, состоящее из одной или нескольких отдельных точек. Так, например, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ определяет точку O(0, 0); уравнению $(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 4)^2 = 0$ соответствует геометрическое место, состоящее из четырех точек: (1, 2); (1, –2); (–1, 2); (–1, –2).

4. Может случиться, что уравнение $F(x, y) = 0$ не определяет никакого геометрического места точек. Так, например, уравнение $x2 + y^2 + 1 = 0$ не удовлетворяется ни одной парой действительных значений координат *x* и *y*.

Если уравнение удовлетворяется, как в только что приведенном примере, лишь в том случае, когда хотя бы одно из переменных *x*, *y* имеет мнимое значение, то говорят, что уравнению соответствует **мнимое место точек**.

Две основные задачи. Пересечение двух линий

Существует две основные задачи.

1. **Дана линия как геометрическое место точек. Составить уравнение этой линии.**

2. **Дано уравнение между координатами x и y. Построить линию, определяемую этим уравнением.**

Пересечение двух линий. Среди различных геометрических задач одно из важных мест занимает задача нахождения точек пересечения двух данных линий. Пусть эти линии определяются соответственно уравнениями $f(x, y) = 0$ и $(x, y) = 0$. Если существует точка их пересечения, то, очевидно, она лежит и на той и на другой линии. Поэтому координаты ее должны удовлетворять каждому из данных уравнений, и, наоборот, всякая точка, координаты которой удовлетворяют этим двум уравнениям, лежит на обеих линиях. Следовательно, чтобы найти точки пересечения двух данных линий, нужно совместно решить их уравнения. Каждое действительное решение этой системы уравнений даст точку пересечения. Если же окажется, что эта система несовместна или во всех ее решениях хотя бы одно из чисел x или y имеет мнимое значение, то это будет означать, что данные линии не пересекаются.

Параметрические уравнения линий

В некоторых случаях при составлении уравнения линии текущие координаты не связывают одним уравнением, а каждую координату в отдельности выражают в виде функции нового переменного, например t. Получают уравнения вида

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\}. \quad (3)$$

Эти уравнения составляются так, что значения x и y соответствуют одному и тому же значению точки, лежащей на данной линии. С изменением t меняются и координаты x и y, а следовательно, соответствующая им точка перемещается по линии. Уравнения (3) называются **параметрическими уравнениями линии**, а t — **переменным параметром**. Если из уравнений (3) исключить параметр t, то получим уравнение между x и y вида $F(x, y) = 0$.

Уравнения линий в полярных координатах

Уравнением линии в полярной системе координат мы будем называть такое уравнение между переменными r и φ, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на линии, и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих ей. Рассмотрим пример на нахождение уравнения данной линии в полярных координатах. Пусть требуется найти уравнение окружности, проходящей через полюс, центр которой C лежит на полярной оси, а радиус равен a. Соединим отрезками прямой произвольную точку M окружности с полюсом и с конечной точкой D диаметра, проходящего через полюс. Координатами точки M будут угол φ и длина r отрезка OM. Припомним, что окружность есть геометрическое место вершин прямых углов, опирающихся на ее диаметр. Следовательно, треугольник OMD — прямоугольный. Отсюда получаем:

$$R = 2a\cos.$$

Это и есть искомое уравнение окружности. Заметим, что вид уравнения данной линии зависит от выбора полюса и полярной оси. Так, если мы выберем полюс в центре окружности радиуса a, то для всех точек окружности (и только для этих точек) полярный радиус будет иметь одно и то же значение r = a; это равенство будет, следовательно, уравнением окружности радиуса a с центром в полюсе. Полярный угол φ в это уравнение не входит, оставаясь произвольным. При исследовании формы линии на основании ее уравнения приходится часто пользоваться полярными координатами. Это удобно делать всякий раз, когда уравнение линии в полярных координатах проще, чем в декартовых. Иногда встречается надобность в переходе от уравнения линии в декартовых координатах к уравнению той же линии в полярных координатах или обратно. В таком случае следует применять формулы, связывающие полярные и декартовы координаты.

3. Прямая линия

Угловой коэффициент прямой

Выбрав определенную систему координат на плоскости, мы можем геометрическое свойство, характеризующее точки рассматриваемой линии, выразить аналитически уравнением между текущими координатами. Таким образом, мы получим **уравнение линии**. В этой главе будут рассматриваться уравнения прямых линий. Чтобы составить уравнение прямой в декартовых координатах, нужно каким-то образом задать условия, определяющие положение ее относительно координатных осей. Предварительно мы введем понятие об угловом коэффициенте прямой, который является одной из величин, характеризующих положение прямой на плоскости. Назовем **углом наклона прямой к оси** O_x тот угол, на который нужно повернуть ось O_x, чтобы она совпала с данной прямой (или оказалась параллельной ей). Как обычно, угол будем рассматривать с учетом знака (знак определяется направлением поворота: против или по часовой стрелке). Так как добавочный поворот оси O_x на угол в 180° снова совместит ее с прямой, то угол наклона прямой к оси O_x может быть выбран не однозначно (с точностью до слагаемого, кратного π). Тангенс этого угла определяется однозначно (так как изменение угла на π не меняет его тангенса). **Тангенс угла наклона прямой к оси O_x называется угловым коэффициентом прямой**. Угловой коэффициент характеризует направление прямой (мы здесь не различаем двух взаимно противоположных направлений прямой). Если угловой коэффициент прямой равен нулю, то прямая параллельна оси абсцисс. При положительном угловом коэффициенте угол наклона прямой к оси O_x будет острым (мы рассматриваем здесь наименьшее положительное значение угла наклона); при этом чем больше угловой коэффициент, тем больше угол ее наклона к оси O_x. Если угловой коэффициент отрицателен, то угол наклона прямой к оси O_x будет тупым. Заметим, что прямая, перпендикулярная оси O_x, не имеет углового коэффициента (тангенс угла не существует).

Уравнение прямой линии с угловым коэффициентом

Рассмотрим прямую линию, не параллельную оси ординат. Положение ее на плоскости будет вполне определено, если задать угол наклона прямой к оси абсцисс и величину отрезка, отсекаемого ею на оси ординат, т. е. величину направленного отрезка оси ординат, началом которого является начало координат, а концом — точка пересечения прямой с осью O_y. Обозначим угол наклона прямой к оси O_x через φ, а величину отрезка OB, отсекаемого прямой на оси O_y, через b. Пусть M(x, y) — произвольная точка прямой. Когда точка M движется по прямой, то ее координаты x и y, изменяясь, остаются все время связанными между собой некоторым условием. Рассмотрим направленный отрезок BM. Зная координаты его начала и конца B(0, b), M(x, y), выразим проекции его на оси координат

$$np_x \overline{BM} = x,$$
$$np_x \overline{BM} = y.$$

Тогда по формуле $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ получим:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y-b}{x}.$$

Отсюда $y - b = x\operatorname{tg}\varphi$, $y = x\operatorname{tg}\varphi + b$ и окончательно

$$y = kx + b, (1)$$

где $k = \operatorname{tg}\varphi$.

Этому уравнению удовлетворяют лишь координаты точки рассматриваемой прямой; оно нарушается, если точка не лежит на прямой. Таким образом, полученное уравнение (1) является уравнением заданной прямой линии. Уравнение прямой вида (1) называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом**. Уравнение (1) мы получили, считая, что прямая не параллельна оси O_y. Посмотрим теперь, какое уравнение будет иметь прямая, параллельная оси O_y. Пусть а — абсцисса точки пересечения этой прямой с осью O_x. Очевидно, любая точка прямой имеет абсциссу, равную а; если же точка не лежит на прямой, то абсцисса ее будет отлична от а. Следовательно, эта прямая имеет уравнение

$$x = a. \quad (2)$$

Итак, если прямая не параллельна оси O_y, то ее уравнение может быть записано в форме (1), если же прямая параллельна оси O_y, то ее уравнение может быть записано в форме (2). Так как уравнения (1) и (2) являются уравнениями первой степени относительно x и y, то тем самым мы доказали, что в координатах **всякая прямая может быть представлена уравнением первой степени**. В частности, если прямая проходит через начало b = 0, уравнение такой прямой будет иметь вид:

$$y = kx. \quad (3)$$

Если прямая параллельна оси O_x и уравнение прямой будет, то угловой коэффициент ее k = 0 и уравнение прямой будет иметь вид

$$y = x - 2. \quad (4)$$

Геометрический смысл уравнения первой степени между двумя переменными

В декартовой системе координат всякая прямая может быть представлена уравнением первой степени. Всякое ли уравнение первой степени относительно переменных x и y определяет прямую? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим уравнение первой степени общего вида и выясним, каково геометрическое место тех точек плоскости, координаты (x, y) которых удовлетворяют этому уравнению.

Мы покажем, что искомым геометрическим местом точек является прямая линия. Общее уравнение первой степени относительно x и y имеет вид:

$$Ax + By + C = 0. \quad (5)$$

Здесь A, B и C — произвольные числа; при этом, конечно, коэффициенты A и B при переменных не могут быть одновременно равны нулю (иначе уравнение (5) не содержало бы переменных x и y и не было бы уравнением). Разрешим уравнение (5) относительно y (предполагая, что B $\neq$ 0).

Получим:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

или, вводя обозначения $-\frac{A}{B} = k$ и $-\frac{C}{B} = b$,

$$y = kx + b. \quad (1)$$

Уравнение (1) является уравнением прямой линии, имеющей угловой коэффициент k и отсекающей на оси ординат отрезок величиной b. Было допущено, что коэффициент B в уравнении (5) отличен от нуля. Если же $B = 0$, то уравнение (5) имеет вид:

$$Ax + C = 0.$$

В таком случае, решая это уравнение относительно x, получим:

$$x = -\frac{C}{A},$$

или, вводя обозначение $-\frac{C}{A} = a$,

$$x = a. \quad (2)$$

Уравнение (2) является уравнением прямой линии, параллельной оси O_y. **Всякое уравнение первой степени относительно текущих координат определяет прямую линию**. В соответствии с этим уравнение (5) называется **общим уравнением прямой**. Прямая линия, и только она, может быть представлена в декартовой системе координат уравнением первой степени относительно текущих координат x и y.

Исследование общего уравнения первой степени Ax + By + C = 0

Как мы видели, общее уравнение первой степени

$$Ax + By + C = 0, \quad (5)$$

определяет прямую линию. Посмотрим, какое положение занимает эта прямая линия по отношению к координатным осям, когда один или два коэффициента уравнения (5) обращаются в нуль.

1. C = 0. В этом случае уравнение (5) имеет вид:

$$Ax + By = 0$$

и определяет прямую, проходящую через начало координат, так как это уравнение удовлетворяется при $x = y = 0$.

2. A = 0. Уравнение (5) имеет вид:

$$By + C = 0,$$

или y = b, где обозначено $b = -\frac{C}{B}$.

Для всех точек такой прямой линии ордината y имеет постоянное значение, т. е. прямая линии расположена параллельно оси O_y на расстоянии от нее, равном $|b|$ (выше оси O_x, если b — число положительное, и ниже оси, если b — число отрицательное)

3. $B = 0$. В этом случае уравнение (5) принимает вид:

$$\mathrm{A}x + C = 0$$

или (обозначая $-\frac{C}{A} = a$) $x = a$ и определяет прямую, параллельную оси O_y.

4. $C = 0$, $B = 0$. Уравнение (5) принимает вид:

$$Ax = 0$$

или

$$x = 0.$$

Прямая совпадает с осью O_y.

5. $C = 0$, $A = \mathrm{O}$. Уравнение (5) приводится к виду $y = 0$. Прямая совпадает с осью O_x.

Уравнение прямой линии в отрезках

Положение прямой линии по отношению к осям можно определять различными способами. В зависимости от способа задания прямой мы будем получать различные формы ее уравнения. Рассмотрим прямую линию, пересекающую обе координатные оси и не проходящую через начало координат. Положение прямой можно определить, указав величины a и b отрезков, отсекаемых прямой соответственно на осях O_x и O_y ($a = вел\overline{OM}$, $b = вел\overline{ON}$). Найдем уравнение этой прямой. Уравнение такой прямой можно записать в виде

$$Ax + By + C = 0, (5)$$

где ни один из коэффициентов A, B, C не равен нулю. Остается найти коэффициенты уравнения (выразить их через параметры a и b). Так как точка M(a, 0) лежит на данной прямой, то ее координаты удовлетворяют уравнению (5):

$$Aa + C = 0,$$

Откуда

$$A = -\frac{C}{a}. \ (6)$$

Аналогично и координаты точки N(0, b) должны удовлетворять уравнению (5), что дает

$$Bb + C = 0$$

или

$$B = -\frac{C}{b}. \ (7)$$

Подставляя значения A и B из равенств (6) и (7) в уравнение (5) прямой, получим:

$$-C\frac{x}{a} - C\frac{y}{b} + C = 0.$$

Деля обе части равенства на C (по условию C $\neq$ 0), найдем:

$$-\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 1 = 0$$

или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \ (8)$$

Уравнение прямой, записанное в форме (8), носит название **уравнения в отрезках**.

Построение прямой линии по ее уравнению. Угол между двумя прямыми

Построение прямой линии по ее уравнению. Чтобы построить прямую линию, достаточно нанести на чертеж две какие-нибудь ее точки. Для отыскания координат какой-либо точки, лежащей на прямой, выбираем произвольно значение одной из координат и по уравнению прямой находим соответствующее значение второй координаты. Практически при построении прямой удобно использовать уравнение в отрезках или найти точки пересечения прямой с осями координат.

Угол между двумя прямыми. Пусть даны две прямые (I) и (II). Углом между прямыми (I) и (II) будем называть тот угол, на который нужно повернуть прямую (I), чтобы она совпала с (II) (или стала ей параллельна). Знак угла устанавливается по обычному правилу. Так как при добавочном повороте на угол π прямая снова займет начальное положение, то ясно, что угол между прямыми (I) и (II) определяется не однозначно (с точностью до слагаемого, кратного π). Одно из значений угла можно всегда выбрать так, чтобы оно было неотрицательным и меньшим π. Практически это значение угла обычно и рассматривается. Пусть прямые (I) и (II) заданы уравнениями

$$y = k_1 x + b_1 \text{ (I)};$$
$$y = k_2 x + b_2 \text{ (II)}.$$

Обозначим через φ_1 угол наклона прямой (I) к оси O_x и через θ угол, на который нужно повернуть прямую (I) до совпадения с (II).

Тогда $\varphi_1 + \theta = \varphi_2$ будет, очевидно, углом наклона прямой (II) к оси O_x. Отсюда

$$\theta = \varphi_2 - \varphi_1,$$

и если (I) и (II) не являются перпендикулярами, то (по известной формуле тригонометрии)

$$\mathrm{tg}\theta = \mathrm{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\mathrm{tg}\varphi_2 - \mathrm{tg}\varphi_1}{1 + \mathrm{tg}\varphi_2 \mathrm{tg}\varphi_1}.$$

Заметив, что $\mathrm{tg}\varphi_1 = k_1$ и $\mathrm{tg}\varphi_2 = k_2$, получим:

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}. \quad (9)$$

Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Прямые параллельны в том и только в том случае, если равны тангенсы углов наклона их к оси O_x, т. е.

$$\mathrm{tg}\varphi_1 = tg\varphi_2$$

или

$$k_1 = k_2. \quad (10)$$

Итак, **условие (необходимое и достаточное) параллельности прямых заключается в равенстве их угловых коэффициентов**. Условие параллельности двух прямых можно получить и непосредственно из формулы (9). В случае перпендикулярности прямых (и только в этом случае) можно считать, что

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$$

или

$$\mathrm{tg}\varphi_2 = \mathrm{tg}\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{ctg}\varphi_1,$$

откуда $\mathrm{tg}\varphi_2 \mathrm{tg}\varphi = -1$ или окончательно

$$k_1 k_2 = -1. \quad (11)$$

Таким образом, **условие (необходимое и достаточное) перпендикулярности прямых заключается в том, что произведение их угловых коэффициентов равно −1**.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Пусть даны точка $A(x_1, y_1)$ и угловой коэффициент к, определяющий направление прямой линии, проходящей через точку А. Уравнение этой прямой будем искать в виде

$$y = kx + b, \quad (12)$$

где неизвестное b должно быть определено из условия прохождения прямой через точку $A(x_1, y_1)$. Так как точка $A(x_1, y_1)$ лежит на данной прямой, то координаты ее должны удовлетворять уравнению (12). Подставляя в уравнение (12) вместо текущих координат координаты x_1, y_1, получим:

$$y_1 = kx_1 + b. \quad (13)$$

Из условия (13) нужно определить b и подставить найденное значение в уравнение (12). Другими словами, нужно исключить b из уравнения (12) и равенства (13), что мы сделаем, вычитая (13) из (12); таким образом, получим уравнение прямой линии, проходящей через точку (x_1, y_1) и имеющей направление, определяемое угловым коэффициентом k:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \ (14)$$

Ясно, что в форме (14) может быть записано уравнение всякой прямой, не параллельной оси O_y. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_1, y_1)$ параллельно оси O_y, будет иметь вид:

$$X = x_1.$$

Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Если две прямые лежат на плоскости, то возможны три различных случая их взаимного расположения:

1) прямые пересекаются (т. е. имеют одну общую точку);
2) прямые параллельны и не совпадают;
3) прямые совпадают.

Выясним, как узнать, какой из этих случаев имеет место, если прямые заданы своими уравнениями

$$\left.\begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{array}\right\}. \ (15)$$

Если прямые пересекаются, т. е. имеют одну общую точку, то координаты этой точки должны удовлетворять обоим уравнениям (15). Следовательно, для нахождения координат точки пересечения прямых нужно решить совместно их уравнения. С этой целью исключим сначала неизвестное x, для чего умножим первое уравнение на A_2, а второе на A_1 и вычтем первое из второго. Будем иметь:

$$(A_1B_2 - A_2B_1)y + C_2A_1 - C_1A_2 = 0. \ (15')$$

Чтобы исключить из уравнений (15) неизвестное y, умножим первое из них на B_2, а второе на B_1, и вычтем второе из первого. Получим:

$$(A_1B_2 - A_2B_1)x + C_1B_2 - C_2B_1 = 0. \ (15^{//})$$

Если $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, то из уравнений ($15^{/}$) и ($15^{//}$) получим решение системы (15):

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \ y = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1}. \ (16)$$

Формулы (16) дают координаты x, y точки пересечения двух прямых. Таким образом, если $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, то **прямые пересекаются**. Если $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, то формулы (16) не имеют смысла. В этом случае прямые параллельны. Действительно, из условия $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ следует, что $-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$, т. е. $k_1 = k_2$ если же $B_1 = B_2 = 0$, то прямые параллельны оси O_y и, следовательно, параллельны между собой.

Итак, если $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, то прямые параллельны.

Рассматриваемое условие можно записать в виде $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Тогда можно сказать, что **если в уравнениях прямых соответствующие коэффициенты при текущих координатах пропорциональны, то прямые параллельны**. В частности, параллельные прямые могут совпадать. Выясним, каков аналитический признак совпадения прямых. Для этого рассмотрим уравнения ($15^{/}$) и ($15^{//}$). Если свободные члены этих уравнений будут оба равны нулю, т. е. $C_2A_1 - C_1A_2 = 0$ и $C_1B_2 - C_2B_1 = 0$, то

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

т. е. коэффициенты при неизвестных и свободные члены уравнений (15) пропорциональны. В таком случае одно из уравнений системы получается из другого умножением всех его членов на некоторый общий множитель, т. е. уравнения (15) равносильны. Следовательно, рассматриваемые параллельные прямые совпадают. Если же хотя бы один из свободных членов уравнений ($15'$) и ($15''$) будет отличен от нуля (или $C_2A_1 - C_1A_2 \neq 0$, или $C_1B_2 - C_2B_1 \neq 0$), т. е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2},$$

то уравнения ($15'$) и ($15''$), а значит, и уравнения (15) не будут иметь решений (по крайней мере одно из равенств ($15'$) или ($15''$) будет невозможным). В этом случае параллельные прямые не будут совпадать. Итак, **условием (необходимым и достаточным) совпадения двух прямых является пропорциональность соответствующих коэффициентов их уравнений**:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Уравнение пучка прямых

Пусть дано уравнение пучка прямых с центром в заданной точке $A(x_1, y_1)$. Иногда центр пучка прямых не задается непосредственно, а определяется парой прямых, принадлежащих пучку. Тогда координаты центра пучка можно найти, решая совместно уравнения данных прямых. Однако можно и не вычислять координат центра пучка, а воспользоваться в этом случае другой формой уравнения пучка прямых. Пусть прямые

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

пересекаются в некоторой точке (x_1,y_1). Составим уравнение:

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0, (17)$$

где λ — произвольный параметр.

При любом значении λ уравнение (17) определяет прямую линию, так как оно является уравнением первой степени относительно переменных x и y. Легко доказать, что эта прямая проходит через точку (x_1, y_1). Действительно, так как точка (x_1, y_1) принадлежит каждой из заданных прямых, то

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 = 0 \text{ и } A_2x_2 + B_2y_2 + C_2 = 0,$$

откуда

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 + \lambda(A_2x_2 + B_2y_2 + C_2) = 0.$$

Следовательно, координаты точки пересечения двух данных прямых удовлетворяют уравнению (17).

Таким образом, уравнение (17) при различных значениях к определяет прямые, принадлежащие пучку с центром в точке (x_1, y_1). Остается выяснить, можно ли из (17) при надлежащем выборе λ получить уравнение любой из прямых пучка. Пусть (α, β) — произвольная точка плоскости, отличная от (x_1, y_1). Прямая, определяемая уравнением (17), пройдет через эту точку, если координаты ее будут удовлетворять уравнению (17), т. е. если

$$A_1\alpha + B_1\beta + C_1 + \lambda(A_2\alpha + B_2\beta + C_2) = 0.$$

Отсюда следует, что при

$$\lambda = -\frac{A_1\alpha + B_1\beta + C_1}{A_2\alpha + B_2\beta + C_2}$$

мы получим из (17) уравнение прямой, проходящей через произвольно выбранную точку плоскости. Параметр λ нельзя подобрать только в том случае, если точка (α , β) будет лежать на прямой $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ (тогда формула, определяющая λ , не будет иметь смысла). Следовательно, уравнение (17) при различных значениях к будет определять все прямые пучка, кроме одной (второй из двух данных). Уравнение этой последней прямой, очевидно, может быть получено из уравнения

$$\mu\,(A_1x + B_1y + C_1) + A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

при $\mu = 0$.

Уравнение вида (17) называют **уравнением пучка прямых**.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Условие, при котором три данные точки лежат на одной прямой

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Пусть даны точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Составим уравнение прямой, проходящей через эти точки. Уравнение пучка прямых линий, проходящих через точку $A(x_1, y_1)$, имеет вид:

$$y - y_1 = k(x - x_1), \quad (18)$$

где k — произвольный параметр.

Чтобы выделить из этого пучка прямую линию, проходящую через точку $B(x_2, y_2)$, потребуем, чтобы координаты этой точки удовлетворяли уравнению (18)

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1). \quad (19)$$

Из равенства (19) нужно определить значение параметра k и внести это значение в уравнение (18). Иначе говоря, нужно исключить k из уравнения (18) и равенства (19), что мы сделаем, деля (18) на (19). Таким образом получим уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \quad (20)$$

Если данные точки A и B лежат на прямой, параллельной оси $O_x(y_2 - y_1 = 0)$ или оси $O_y(x_2 - x_1 = 0)$, то уравнение прямой будет соответственно иметь вид $y = y_1$ или $x = x_1$.

Условие, при котором три данные точки лежат на одной прямой. Пусть даны три точки: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и C(x3, y3). Уравнение прямой линии, проходящей через точки A и B, запишем в форме (20). Точка C лежит на этой прямой в том и только в том случае, когда ее координаты x_3, y_3 удовлетворяют уравнению этой прямой. Таким образом, искомым условием будет:

$$\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}. \quad (21)$$

Нормальное уравнение прямой линии

Пусть на плоскости дана какая-нибудь прямая линия. Проведем через начало координат прямую l перпендикулярно к данной: выберем на ней положительное направление от начала координат в сторону данной прямой (если данная прямая проходит через начало координат, то положительное направление на прямой можно выбрать произвольно). Положение данной прямой относительно осей координат можно охарактеризовать, указав ее расстояние p от начала координат и угол α между осью O_x. Составим уравнение этой прямой. Пусть M(x, y) — произвольная точка прямой. Построим координатные отрезки точки M, рассмотрим направленную ломаную $\overline{ORMP}$ и возьмем ее проекцию на ось l. Так как проекция ломаной линии на ось равна проекции ее замыкающего отрезка, то

$$np\overline{ORMP}=np\overline{OP}. \quad (22)$$

С другой стороны, проекция ломаной линии равна сумме проекций ее звеньев, т. е.

$$np\overline{ORMP} = np\overline{OR} + np\overline{RM} + np\overline{MP}. \quad (22^{/})$$

Сравнивая (22) и ($22^{/}$), получим:

$$np\overline{RM} + np\overline{RM} + np\overline{MP} = np\overline{OP}. \quad (22^{//})$$

Так как проекция направленного отрезка на ось равна его величине, умноженной на косинус угла между осью проекций и осью, на которой расположен отрезок, то

$$np\overline{OR} = x\cos(-\alpha) = x\cos\alpha\,,$$
$$np\overline{RM} = y\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = y\sin\alpha,$$
$$np\overline{OP} = p\,.$$

Учитывая, кроме того, что $np\overline{MP} = 0,$ и подставляя найденные значения в равенство ($22^{//}$), получим:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p,$$

или

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \quad (23)$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты x, y любой точки рассматриваемой прямой линии. Если же точка не лежит на данной прямой, то ее координаты этому уравнению удовлетворять не будут, так как в этом случае проекция соответствующей ломаной на ось l не будет равна p. Следовательно, уравнение (23) является уравнением данной прямой. Уравнение вида (23) называется **нормальным уравнением прямой**. Заметим, что нормальное уравнение прямой характеризуется двумя особенностями:

1) свободный член его $-p \le 0$;

2) сумма квадратов коэффициентов при текущих координатах равна единице $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Как бы ни располагалась прямая относительно координатных осей, ее уравнение всегда можно записать в нормальном виде.

Приведение общего уравнения первой степени к нормальному виду

Пусть дано общее уравнение первой степени:

$$Ax + By + C = 0. \quad (24)$$

Покажем, что такое уравнение можно привести к нормальному виду. С этой целью помножим обе части уравнения на постоянный множитель M, подобрав его так, чтобы получилось уравнение вида (23). Уравнение (24) преобразуется к виду:

$$MAx + MBy + MC = 0. \quad (24')$$

Чтобы уравнение (24′) было вида, одинакового с уравнением (23), нужно положить:

$$MA = \cos\alpha,\ MB = \sin\alpha,\ MC = -p. \quad (25)$$

Из равенств (25) легко найдем неизвестные M, α и p выраженные через известные коэффициенты A, B, C. В самом деле, возводя первые два из равенств (25) в квадрат и складывая, получим:

$$M^2A^2 + M^2B^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

или

$$M^2(A^2 + B^2) = 1,$$

откуда

$$M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (26)$$

В формуле (26) нужно брать знак, противоположный знаку свободного члена C, как это видно из последнего равенства (25). При C = 0 знак можно выбрать произвольно. Подставляя найденное значение M в равенства (25), получим формулы для $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и p:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (25')$$

Итак, уравнение (24) приводится к нормальному виду путем умножения его на множитель M, определяемый по формуле (26). Этот множитель M носит название **нормирующего множителя**.

Расстояние от данной точки до данной прямой

Условимся называть отклонением данной точки от данной прямой число d, равное длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую, взятой со знаком плюс, если точка и начало координат лежат по разные стороны от данной прямой, и со знаком минус, если они лежат по одну сторону от прямой. Для точек, лежащих на прямой, отклонение равно нулю.

Пусть даны прямая линия уравнением в нормальном виде

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \quad (27)$$

и точка $A(x_1, y_1)$. Найдем отклонение d точки A от данной прямой.

Рассмотрим ломаную линию $\overline{ORAKP}$ и возьмем ее проекцию на ось l.

Так как проекция ломаной линии равна проекции замыкающего отрезка, то

$$пр\overline{ORAKP} = пр\overline{OP} = p. \quad (28)$$

С другой стороны, проекция ломаной линии равна сумме проекций ее звеньев, т. е.

$$пр\overline{ORAKP} = пр\overline{OR} + пр\overline{RA} + пр\overline{AK} + пр\overline{KP}.$$

Следовательно, равенство (28) перепишется в виде:

$$пр\overline{OR} + пр\overline{RA} + пр\overline{AK} + пр\overline{KP} = p. \quad (28')$$

Так как проекция направленного отрезка равна его величине, умноженной на косинус угла между осью проекций и осью, на которой лежит отрезок, то

$$пр\overline{OR} = x_1 \cos(-\alpha) = x_1 \cos\alpha,$$
$$пр\overline{RA} = y_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Учитывая, кроме того, что $пр\overline{AK} = -d$, $пр\overline{KP} = 0$, $пр\overline{OP} = p$ и подставляя найденные значения в равенство (28'), будем иметь:

$$x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - \mathrm{d} = p,$$

откуда

$$d = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p. \quad (29)$$

Следовательно, **чтобы получить отклонение точки A(x_1, y_1) от данной прямой, нужно в левую часть нормального уравнения этой прямой подставить вместо текущих координат координаты данной точки x_1 и y_1**. Очевидно, расстояние точка от прямой есть абсолютная величина отклонения и вычисляется по формуле

$$|d| = |x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p|. \quad (29')$$

Уравнение прямой в полярной системе координат

Положение прямой линии на плоскости будет вполне определено, если задать ее расстояние p от полюса O и угол α между полярной осью и осью l, проходящей через полюс перпендикулярно к прямой. Положительным направлением оси l будем считать направление от полюса к данной прямой (если прямая проходит через полюс, то положительное направление оси l может быть выбрано произвольно). Очевидно, все точки данной прямой линии, и только они, обладают следующим свойством: проекция на ось l отрезка $\overline{OM}$, проведенного из полюса O в точку M прямой линии, равна p. Обозначая через r и координаты произвольной точки прямой линии, указанное свойство мы можем записать в виде

$$r\cos(\alpha - \varphi) = p.$$

Это и есть уравнение прямой линии в полярных координатах.

4. Элементарная теория конических сечений

Окружность

Общее уравнение второй степени относительно переменных x и y может содержать члены второй степени (x^2, xy и y^2), первой степени (x и y) и нулевой степени (свободный член). В соответствии с этим общее уравнение второй степени можно записать в виде:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Здесь по крайней мере один из коэффициентов A, B, C должен быть отличен от нуля.

Окружность. Окружность с центром в точке C(a, b) и радиусом R имеет уравнение

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (1)$$

Раскрывая скобки, придадим уравнению (1) вид:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - R^2) = 0 \quad (1')$$

или

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (1'')$$

где

$$D = -2a,\ E = -2b,\ F = a^2 + b^2 - R^2.$$

Уравнение ($1''$) является **уравнением второй степени. Итак, окружность имеет уравнение второй степени относительно текущих координат**. Но не всякое уравнение второй степени определяет окружность. Из уравнения ($1''$) видно, что в уравнении окружности коэффициенты при квадратах координат равны, а член с произведением координат (xy) отсутствует. Обратно, если эти два условия (равенство коэффициентов при x^2 и y^2 и отсутствие члена xy осуществлены, то уравнение, вообще говоря, определяет окружность, так как оно приводится к виду ($1^{//}$) путем деления на коэффициент при x^2. Итак, по виду данного уравнения второй степени мы можем решить, является ли оно уравнением окружности или нет. Например, уравнение $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ определяет окружность, так как в нем коэффициенты при квадратах координат равны между собой, а член с произведением координат отсутствует. Желая построить эту окружность, мы должны предварительно определить координаты ее центра и радиус. С этой целью данное уравнение мы приведем к виду (1). Такое преобразование есть не что иное, как представление уравнения ($1^{//}$) в виде (1). Возьмем в данном уравнении члены, содержащие x, т. е. $x^2 - 2x$, и представим этот двучлен в виде:

$$x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1,$$

т. е. выделим из членов, содержащих x, полный квадрат линейного двучлена $(x - 1)$.

Далее возьмем члены, содержащие y, т. е. $y^2 + 4y$, и, преобразуя этот двучлен таким же образом, получим:

$$y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 4.$$

После этого данное уравнение запишется так:

$$(x - 1)^2 - 1 + (y^2 + 2)^2 - 4 - 4 = 0.$$

Перенося свободные члены вправо, будем иметь:

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением окружности (1), усматриваем, что $a = 1$, $b = -2$, $R = 3$. Таким образом, центром окружности является точка (1, –2) и радиус окружности равен 3. По этим данным мы можем построить окружность.

Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (эта постоянная должна быть больше расстояния между фокусами). Чтобы составить уравнение эллипса, примем за ось абсцисс прямую, соединяющую две данные точки F_1 и F_2, выбрав на ней положительное направление от F_2 к F_1; начало координат возьмем в середине отрезка, соединяющего две данные точки. Обозначим через 2 с расстояние F_1F_2 между фокусами. Тогда координаты точек F_1 и F_2 будут соответственно (c, 0) и (–c, 0). Обозначая через x и y координаты произвольной точки M эллипса, выразим длины отрезков F_1M и F_2M по формуле расстояния между двумя точками:

$$F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$
$$F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

По определению эллипса сумма $F_1M + F_2M = 2a$ есть величина постоянная. Обозначая ее через 2a, имеем:

$$F_1M + F_2M = 2a$$

или

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Это есть уравнение эллипса в выбранной системе координат. Чтобы найденное уравнение эллипса приняло простейший вид, нужно в этом уравнении освободиться от радикалов. Перенося один радикал направо, получим:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Возводя в квадрат обе части, найдем:

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

или

$$-4cx=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

т. е.

$$cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Возводя снова в квадрат, получим:

$$c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)$$

или

$$c^2x^2+a4=a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2,$$

т. е.

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Разделив обе части на $a^2(a^2-c^2)$, получим:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1. \quad (2)$$

Так как по условию $c < a$, то $a^2 - c^2$ есть положительная величина; ее принято обозначать через b^2. Тогда уравнение эллипса будет:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ (3)$$

где положено

$$b^2 = a^2 - c^2. \ (4)$$

Уравнение (3) называется **каноническим** уравнением эллипса.

1. **Симметрия эллипса**. Так как уравнение (3) содержит только квадраты текущих координат, то если точка (x, y) находится на эллипсе, то и точки ($\pm$x, $\pm$y) находятся на эллипсе при произвольном выборе знаков у координат; следовательно, оси координат являются осями симметрии эллипса. Ось симметрии эллипса, на которой располагаются фокусы, называется **фокальной осью**. Точка пересечения осей симметрии — центр симметрии — называется **центром эллипса**. Для эллипса, заданного уравнением (3), фокальная ось совпадает с осью O_x, а центром является начало координат.

2. **Точки пересечения с осями симметрии.** Точки пересечения эллипса с осями симметрии называются его **вершинами**. Эллипс, заданный уравнением (3), имеет вершины в точках пересечения его с осями координат, так как последние являются осями симметрии. Полагая в уравнении (3), что $y = 0$, найдем абсциссы точек пересечения эллипса с осью O_x:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1,$$

откуда $x^2 = a^2$ и $x = \pm a$.

Полагая, что $x = 0$, найдем ординаты точек пересечения эллипса с осью O_y:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1,$$

откуда $y^2 = b^2$ и $y = \pm b$.

Следовательно, вершинами эллипса будут точки: $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$, $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$.

Отрезки A_1A_2 и B_1B_2, соединяющие противоположные вершины эллипса, а также их длины 2a и 2b, называют соответственно **большой и малой осями эллипса**. Длины a и b называют соответственно **большой и малой полуосями эллипса**.

3. **Форма эллипса.** Чтобы исследовать форму эллипса, достаточно считать в уравнении (3) $x \geq 0$ и $y \geq 0$, потому что, как было выше замечено, эллипс симметрично расположен относитель но осей координат. Из уравнения (3) следует, что $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$, $x \leq a$, т. е. x может изменяться от 0 до a. С увеличением x от 0 до a ордината y уменьшается от b до 0.

4. **Механическое построение эллипса.** Зная фокусы F_1 и F_2 и длину 2a большой оси, легко механически построить эллипс. Нужно взять нить длиной 2a, укрепить два ее конца в точках F_1 и F_2 и, придав ей форму F_1MF_2, описать точкой M эллипс (в точке M поместить острие карандаша). При $a = b$ ($c = 0$) уравнение (3) принимает вид $x^2 + y^2 = a^2$ и определяет окружность. Поэтому окружность можно рассматривать как эллипс с равными полуосями.

Гипербола и ее асимптоты

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (эта постоянная должна быть положительной и меньше расстояния между фокусами). Обозначим эту постоянную через 2a, расстояние между фокусами через 2c и выберем оси координат. Пусть M(x, y) — произвольная точка гиперболы.

По определению гиперболы

$$F_2M - F_1M = \pm 2a.$$

В правой части равенства нужно выбрать знак плюс, если $F_2M > F_1M$, и знак минус, если $F_2M > F_1M$.

Так как $F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ и $F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, то последнее равенство можно записать в виде:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Это и есть уравнение гиперболы в выбранной системе координат. Освобождаясь в этом уравнении от радикалов, можно привести уравнение к простейшему виду. Перенося первый радикал в правую часть равенства и возводя обе части в квадрат, после очевидных преобразований получим:

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} =^2 a + cx.$$

Возведя еще раз обе части равенства в квадрат, сделав приведение подобных членов и разделив на свободный член, получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \ (2)$$

Так как c > a, то величина c^2 - a^2 положительна. Обозначая ее через b^2, т. е. полагая, что

$$b^2 = c^2 - a^2, \ (3)$$

получим **каноническое уравнение гиперболы**:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3')$$

1. **Симметрия гиперболы**. Так как уравнение $(3')$ содержит только квадраты текущих координат, то оси координат являются осями симметрии гиперболы (см. аналогичное утверждение для эллипса). Ось симметрии гиперболы, на которой располагаются фокусы, называется **фокальной осью**. Точка пересечения осей симметрии — центр симметрии — называется **центром** гиперболы. Для гиперболы, заданной уравнением $(3')$, фокальная ось совпадает с осью O_x, а центром является начало координат.

2. **Точки пересечения с осями симметрии.** Найдем точки пересечения гиперболы с осями симметрии — **вершины** гиперболы. Полагая в уравнении $(3')$, что $y = 0$, найдем абсциссы точек пересечения гиперболы с осью O_x:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1,$$

откуда $x^2 = a^2$ и $x =\ a$.

Следовательно, точки $A_1(a, 0)$ и $A_2(-a, 0)$ являются вершинами гиперболы; расстояние между ними равно 2a. Чтобы найти точки пересечения с осью O_y, положим в уравнении $x = 0$. Получим для определения ординат этих точек уравнение

$$-\frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ или y2 = –b2},$$

откуда

$$y = \pm\sqrt{-b^2} = \pm b\sqrt{-1},$$

т. е. для y мы получили мнимые значения; это означает, что ось O_y не пересекает гиперболы. В соответствии с этим ось симмет-рии, пересекающая гиперболу, называется **действительной осью симметрии (фокальной осью)**; ось симметрии, которая не пересекает гиперболы, называется **мнимой осью симметрии**. Для гиперболы, заданной уравнением ($3'$), действительной осью симметрии является ось O_x, мнимой осью симметрии — ось O_y. Отрезок A_1A_2, соединяющий вершины гиперболы, а также его длина 2a называются **действительной осью гиперболы**. Если на мнимой оси симметрии гиперболы отложить в обе стороны от ее центра O отрезки OB_1 и OB_2 длиною b, то отрезок B_1B_2, а также его длина 2b называются мнимой осью гиперболы. Величины a и b называются соответственно действительной и мнимой полуосями гиперболы.

3. **Форма гиперболы**. При исследовании формы гиперболы достаточно рассматривать положительные значения x и y, потому что кривая симметрично расположена относительно осей координат. Так как из уравнения ($3'$) следует, что $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$, то x может изменяться от a до $+\infty$.

Когда x увеличивается от a до $+\infty$, то y тоже увеличивается от 0 до $+\infty$. Кривая располагается вне полосы, ограниченной прямыми $x = \pm a$, и состоит из двух отдельных ветвей. Для любой точки M одной из этих ветвей $F_2M > F_1M$ и $F_2M - F_1M = 2a$ (правая ветвь), для любой точки M другой ветви $F_1M > F_2M$ и $F_1M - F_2M = 2a$ (левая ветвь).

4. **Асимптоты гиперболы.** Чтобы более ясно представить себе вид гиперболы, рассмотрим две прямые линии, тесно с ней связанные, — так называемые асимптоты. Предполагая x и y положительными, разрешим уравнение ($3'$) гиперболы относительно ординаты y:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1,$$

откуда

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,.\ (3^{\prime\prime})$$

Сопоставим уравнение ($3^{\prime\prime}$) с уравнением прямой линии $y = \frac{b}{a}x$, называя соответствующими две точки N(x, Y) и M(x, y), расположенные соответственно на этой прямой и на гиперболе и имеющие одну и ту же абсциссу x. Очевидно, $Y > y$ и разность $Y - y$ ординат соответствующих точек выражает расстояние между ними, т. е. $MN = Y - y$. Покажем, что при неограниченном возрастании x расстояние MN, убывая, стремится к нулю. Тогда

$$MN = Y - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

откуда

$$MN = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{b}{a}\frac{\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

После упрощения получим:

$$MN = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Из последней формулы мы усматриваем, что при неограниченном возрастании абсциссы x расстояние MN убывает и стремится к нулю. Когда точка M, двигаясь по гиперболе в первом квадранте, удаляется в бесконечность, то ее расстояние до прямой $y = \frac{b}{a}x$ уменьшается и стремится к нулю. То же обстоятельство будет иметь место при движении точки M по гиперболе в третьем квадранте (вследствие симметрии относительно начала координат O). Наконец, вследствие симметрии гиперболы относительно оси O_y мы получим вторую прямую $y = -\frac{b}{a}$, симметрично расположенную с прямой $y = \frac{b}{a}x$, к которой также будет неограниченно приближаться точка М при движении по гиперболе и удалении в бесконечность (во втором и четвертом квадрантах). Эти две прямые линии носят название **асимптот гиперболы,** они, как мы видели, имеют уравнения:

$$y = \frac{b}{a}x \text{ и } y = -\frac{b}{a}. \quad (5)$$

Асимптоты гиперболы располагаются по диагоналям прямоугольника, одна сторона которого параллельна оси O_x и равна 2a, другая — параллельна оси O_y и равна 2b, а центр лежит в начале координат. При вычерчивании гиперболы по ее уравнению рекомендуется предварительно построить ее асимптоты.

Равносторонняя гипербола. В случае b = a гипербола называется **равносторонней**; ее уравнение получается из $(3')$ и имеет вид:

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Очевидно, угловые коэффициенты асимптот $\left(k = \pm\frac{b}{a}\right)$ для равносторонней гиперболы будут ± 1. Следовательно, асимптоты равносторонней гиперболы перпендикулярны между собой и делят пополам углы между ее осями симметрии.

Парабола

Парабола — это геометрическое место точек, равноотстоящих от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой (предполагается, что данная точка не лежит на прямой). Чтобы составить уравнение параболы, примем за ось O_x прямую, проходящую через фокус F перпендикулярно к директрисе, и будем считать ее направленной от директрисы к фокусу; за начало координат возьмем середину O отрезка от точки F до данной прямой, длину которого обозначим через p. Величину p называют **параметром параболы**. Координаты фокуса F будут $\left(\frac{p}{2},0\right)$. Обозначим через x и y координаты произвольной точки M параболы. Тогда координаты точки K — основания перпендикуляра, опущенного из M на директрису, будут $-\left(\frac{p}{2},y\right)$. Так как по определению $FM = MK$, то, применяя формулу расстояния между двумя точками, получим уравнение параболы в выбранной системе координат:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}\ .$$

Чтобы придать ему простейший вид, возведем обе части в квадрат. Будем иметь:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

или

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

откуда

$$y^2 = 2px. \quad (6)$$

Полученное уравнение называется **каноническим**уравнением параболы. При этом x не может принимать отрицательных значений, т. е. все точки параболы лежат справа от оси O_y. Каждому значению x соответствуют два значения y, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку, т. е. кривая симметрично расположена относительно оси O_x. С увеличением x абсолютная величина ординаты y увеличивается, причем когда x неограниченно растет, то $|y|$ тоже неограниченно растет. Парабола имеет одну ось симметрии; ось симметрии параболы называют **ее осью**. Точка пересечения параболы с осью симметрии называется **ее вершиной**. Для параболы, заданной уравнением (6), вершиной является начало координат. Заметим, что все три рассмотренные линии — эллипс, гипербола, парабола — в декартовой системе координат могут быть представлены уравнениями второй степени.

Построение точек эллипса, гиперболы и параболы посредством циркуля и линейки

Из уравнения эллипса определяем a и b, изображая их отрезками OA_1 и OB_1 на осях координат. Из точки B_1, как из центра, радиусом, равным a, описываем окружность, которая в пересечении с осью O_x; даст фокусы эллипса F_1 и F_2, так как при таком построении соблюдается зависимость $c^2 = a^2 - b^2$. Найдя фокусы эллипса, делим отрезок 2a на две части: r_1 и $r_2 = 2a - r_1$, и радиусами, равными r_1 и r_2, описываем две окружности, принимая за их центры соответственно фокусы F_1 и F_2. Точки пересечения этих окружностей лежат на эллипсе, так как сумма расстояний каждой из этих точек до фокусов будет равна 2a. Меняя r_1, будем получать новые точки эллипса. Аналогично проводится построение точек гиперболы. Определяя из уравнения гиперболы a и b, изображаем их отрезками OA_1 и OB_1 на осях координат. Из точки O, как из центра, радиусом, равным $c = A_1B_1$, описываем окружность, которая в пересечении с осью O_x даст фокусы гиперболы F_1 и F_2 (так как при этом построении соблюдается равенство $c^2 = a^2 + b^2$). Найдя фокусы гиперболы, описываем из них, как из центров, две окружности радиусов г, и $r_2 = 2a + r_1$. Точки M_1 и M_2 пересечения окружностей лежат на правой ветви гиперболы, так как разность расстояний каждой из этих точек до фокусов будет равна $r_2 - r_1 = 2a$. Меняя r_1, будем получать новые точки правой ветви гиперболы. Изменяя роль фокусов, получим точки левой ветви гиперболы. Перейдем, наконец, к построению точек параболы. Прежде всего строим фокус и директрису параболы, откладывая на оси O_x вправо от О отрезок OF, $\frac{p}{2}$ равный, такой же отрезок OK — влево от O и проводя через точку K прямую, перпендикулярную к оси параболы. Параметр p определяется из уравнения параболы. Проводим прямую линию, перпендикулярную оси параболы, на произвольном расстоянии $d\left(d \geq \frac{p}{2}\right)$ от директрисы и из фокуса F, как из центра, описываем окружность радиуса d. Точки пересечения M_1 и M_2 проведенной прямой линии с окружностью принадлежат параболе, так как для каждой из этих точек расстояния до фокуса и директрисы равны между собой.

Эллипс, гипербола и парабола могут быть получены сечением прямого кругового конуса плоскостями. Поэтому кривые эти называют коническими сечениями. Рассмотрим сечения прямого кругового конуса плоскостями, не проходящими через его вершину. Можно доказать, что если плоскость пересекает лишь одну полость конуса, не будучи параллельна ни одной из образующих его, то кривая сечения будет эллипсом; если же секущая плоскость будет параллельна одной из образующих конуса, то кривая сечения будет параболой. В том случае, когда плоскость пересекает обе полости конуса, кривая сечения будет гиперболой. Итак, в зависимости от положения секущей плоскости сечением прямого кругового конуса будет эллипс, гипербола или парабола.

Эксцентриситет и директрисы эллипса

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых его фокусами, есть величина постоянная. Обозначая через $r_1 = F_1M$ и $r_2 = F_2M$ расстояния любой точки M эллипса соответственно до его правого и левого фокусов F_1 и F_2, мы имеем согласно вышеупомянутому определению эллипса:

$$r_1 + r_2 = 2a. \quad (7)$$

С другой стороны, применяя формулы расстояния между двумя точками, мы получим:

$$r_2 = F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$
$$r_1 = F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

где x, y обозначают координаты точки M эллипса;

c — половину фокусного расстояния F_1F_2.

Возводя два последних равенства в квадрат и вычитая, находим:

$$r^2_2 - r^2_1 = (x + c)^2 + y^2 - (x - c)^2 - y^2.$$

Раскрывая скобки и делая приведение подобных членов, получаем:

$$r^2_2 - r^2_1 = 4cx. \quad (8)$$

Из уравнений (7) и (8), считая в них искомыми величинами r_1 и r_2, мы определяем последние. С этой целью, переписав уравнение (8) в виде

$$(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 4cx,$$

воспользуемся уравнением (7), что нам даст:

$$r_2 - r_1 = 2\frac{c}{a}x.$$

Решая полученное уравнение совместно с уравнением (7), найдем r_1 и r_2:

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x,$$
$$r_2 = a + \frac{c}{a}x.$$

Величина $\frac{c}{a}$, входящая в последние формулы, называется **эксцентриситетом** эллипса; будем обозначать ее ε. Очевидно, $\varepsilon = \frac{c}{a}$ — это отношение фокусного расстояния 2c к длине большой оси 2a, причем $0 \le \varepsilon < 1$, так как $0 \le \varepsilon <$ a (для окружности c = 0 и $\varepsilon = 0$). Таким образом, мы имеем следующие формулы для **фокальных радиусов** r_1 и r_2:

$$r_1 = a - \varepsilon x,\ r_2 = a + \varepsilon x. \quad (9)$$

Рассмотрим прямую x = l (l > a), параллельную оси O_y, и найдем, во-первых, расстояние r_1, произвольной точки M(x, y) эллипса от его правого фокуса, и, во-вторых, — расстояние d_1 этой точки M от прямой x = l. Вычислим отношение этих расстояний.

Так как $d_1 = l - x$, то

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a - \varepsilon x}{l - x} = \varepsilon \frac{\frac{a}{\varepsilon} - x}{l - x}.$$

Если $l = \frac{a}{\varepsilon}$, то написанное отношение $\frac{r_1}{d_1}$ будет сохранять постоянное значение, равное ε.

В силу симметрии то же заключение можно сделать относительно левого фокуса F_2 и прямой с уравнением $x = -\frac{a}{\varepsilon}$. Эти две прямые, перпендикулярные к фокальной оси эллипса и отстоящие на расстояние $\frac{a}{\varepsilon}$ от его центра, называются **директрисами эллипса**. Как мы выяснили, они обладают следующим свойством: **отношение расстояний любой точки эллипса до фокуса а соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная ε.**

Эксцентриситет и директрисы гиперболы

Сохраняя обозначения предыдущего параграфа, в силу определения гиперболы имеем:

$$r_2 - r_1 = \pm 2a, \text{ (10)}$$

где знак плюс относится к правой ветви гиперболы, а знак минус — к левой. С другой стороны, как и в предыдущем параграфе, найдем:

$$r^2{}_2 - r^2{}_1 = 4cx. \text{ (8)}$$

Из уравнений (10) и (8) находим искомые величины r_1 и r_2. Для этого, переписав уравнение (8) в виде

$$(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 4cx,$$

воспользуемся уравнением (10), что нам даст:

$$r_2 - r_1 = \pm 2\frac{c}{a}x.$$

Наконец, решая последнее уравнение совместно с уравнением (10), получим выражения для r_1 и r_2:

$$r_1 = -a + \frac{c}{a}x; \quad r_2 = a + \frac{c}{a}x \text{ (правая ветвь);}$$
$$r_1 = a - \frac{c}{a}x; \quad r_2 = -a - \frac{c}{a}x \text{ (левая ветвь).}$$

Величина $\frac{c}{a}$, входящая в последние формулы, называется эксцентриситетом гиперболы; условимся обозначать ее через ε. Очевидно, $\varepsilon = \frac{c}{a}$ есть отношение фокусного расстояния 2c к длине действительной оси 2а, причем теперь $\varepsilon > 1$, так как c > a. Итак, мы имеем следующие формулы для фокальных радиусов r_1 и r_2 гиперболы:

$$r_1 = -a + \varepsilon x,\ r_2 = a + \varepsilon x \text{ (правая ветвь)};$$
$$r_1 = a - \varepsilon x,\ r_2 = -a - \varepsilon x \text{ (левая ветвь)}. \quad (11)$$

Назовем прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, перпендикулярные к фокальной оси гиперболы и расположенные на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от ее центра, **директрисами** гиперболы, соответствующими правому и левому фокусам. Так как для гиперболы $\varepsilon > 1$, то $\frac{a}{\varepsilon} < a$ и, следовательно, директрисы располагаются между вершинами. Легко доказать, **что отношение расстояний любой точки гиперболы до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная** ε. Вследствие симметрии это свойство достаточно обнаружить относительно правого фокуса и соответствующей ему директрисы. Обозначая через d_1, расстояние точки M(x, y) гиперболы до правой директрисы,усматриваем, что $d_1 = x - \frac{a}{\varepsilon}$ в случае, если M находится на правой ветви гиперболы, и $d_1 = \frac{a}{\varepsilon} - x$, если M лежит на левой ветви.

Составим теперь отношение $\frac{r_1}{d_1}$, пользуясь формулами (11):

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{-a + \varepsilon x}{x - \frac{a}{\varepsilon}} \text{ (правая ветвь);}$$
$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon} - x} \text{ (левая ветвь).}$$

В обоих случаях отношение $\frac{r_1}{d_1}$ будет одинаково и равно:

$$\frac{a - \varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon}} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Эксцентриситет и директриса параболы

Обозначая через r расстояние любой точки M параболы до фокуса, а через d ее расстояние до директрисы, мы имеем $r = d$ или $\frac{r}{d} = 1$. Поэтому **эксцентриситет параболы принимают равным единице**.

Уравнение директрисы параболы будет:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Получаем следующее общее определение конического сечения (эллипса, гиперболы и параболы): **коническое сечение есть геометрическое место точек, отношение расстояний которых до данной точки (фокуса) и до данной прямой (директрисы) есть величина постоянная (ε)**. При этом

для эллипса $\frac{FM_1}{M_1N_1} = \varepsilon < 1$,

для параболы $\frac{FM_2}{M_2N_2} = \varepsilon = 1$,

для гиперболы $\frac{FM_3}{M_3N_3} = \varepsilon > 1$.

Уравнение конического сечения в полярных координатах

Пусть ABC — дуга конического сечения (эллипса, гиперболы или параболы), B — вершина, F — фокус и DE — соответствующая директриса.

Примем точку F за полюс, а прямую BFP — за полярную ось, выбрав на ней направление от фокуса F в сторону, противоположную директрисе; обозначим эксцентриситет кривой через е. Пусть M_0 — точка дуги BC конического сечения, лежащая на перпендикуляре к полярной оси, проходящем через полюс F. Обозначим длину FM_0 через p и будем называть ее фокальным параметром конического сечения. Пусть M (r, φ) — произвольная точка кривой. Составим уравнение, выражающее зависимость между ее полярными координатами r, φ и данными числам ε, p. По общему свойству всех точек конического сечения имеем:

$$\frac{FM}{NM} = \varepsilon \text{ . (12)}$$

При любом расположении точки M на коническом сечении

$$FM = r \text{ и } NM = N_0M_0 + r\cos\varepsilon \text{ .}$$

Так как $\frac{FM_0}{N_0M_0} = \varepsilon$ а, $FM = p$, то $N_0M_0 = \frac{p}{\varepsilon}$. Следовательно,

$$NM = \frac{p}{\varepsilon} + r\cos\varphi \text{ . (13)}$$

Тогда равенство (12) можно переписать в виде

$$\frac{r}{\frac{p}{\varepsilon} + r\cos\varphi} = \varepsilon \text{ ,}$$

откуда

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi} \text{ . (14)}$$

Уравнение (14) будет определять эллипс, если $\varepsilon < 1$, параболу — при $\varepsilon = 1$, гиперболу, когда $\varepsilon > 1$. В уравнении (14) величина p для параболы имеет, очевидно, прежнее значение, т. е. то же, что и в уравнении $y^2 = 2px$. В самом деле, для параболы $p = FM_0 = M_0N_0$, т. е. p есть расстояние фокуса до директрисы (параметр параболы). Для эллипса и гиперболы можно поставить вопрос: как выразить фокальный параметр p через полуоси a и b? В случае эллипса

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ мы подставим в его уравнение координаты одной из точек эллипса, а именно $M_0(-c, p)$; после этого получим:

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{p^2}{b^2}=1$$

или

$$\frac{p^2}{b^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2},$$

откуда

$$p^2=\frac{b^4}{a^2} \text{ и } p=\frac{b^2}{a}.$$

В случае гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ координаты ее точки $M_0(c, p)$ подставим в уравнение, после чего получим:

$$\frac{c^2}{a^2}-\frac{p^2}{b^2}=1 \text{ или } \frac{p^2}{b^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2},$$

откуда снова имеем

$$p^2=\frac{b^4}{a^2} \text{ и } p=\frac{b^2}{a}.$$

Итак, **уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах (при указанном выборе полюса и полярной оси) имеют одинаковый вид**

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}, \quad (14)$$

причем для эллипса и гиперболы фокальный параметр p связан с параметрами a и b формулой

$$p = \frac{b^2}{a} . \quad (15)$$

В случае гиперболы уравнение (14) выведено для одной ее ветви, но легко убедиться в том, что ему также удовлетворяют координаты любой точки, расположенной на другой ветви гиперболы.

Диаметры эллипса. Сопряженные диаметры

Рассмотрим эллипс, отнесенный к его осям симметрии:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 , \quad (16)$$

и систему параллельных между собой хорд с угловым коэффициентом k_1. Посмотрим, как располагаются середины этих хорд. Иными словами, выясним, каким условием связаны координаты середин параллельных между собой хорд эллипса. Возьмем любую из хорд и обозначим ее концы через $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, а середину — через M(X, Y). Так как точки M_1, и M_2 лежат на эллипсе, то их координаты должны удовлетворять его уравнению (16), т. е.

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 , \quad (17)$$

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 . \quad (18)$$

Выражая угловой коэффициент k прямой линии M_1M_2 через координаты двух ее точек, будем иметь:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (19)$$

Наконец, заметив, что точка M является серединой отрезка M_1M_2, получим:

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad (20)$$

$$Y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (21)$$

Исключим из пяти соотношений (17)—(21) четыре вспомогательные величины x_1, x_2, y_1, y_2. С этой целью, вычитая равенство (17) из равенства (18), найдем:

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2 - y_1^2}{b^2} = 0$$

или

$$\frac{(x_2 - x_1)(x_1 + x_2)}{a^2} + \frac{(y_2 - y_1)(y_1 + y_2)}{b^2} = 0 .$$

Внося в последнее равенство согласно (20) вместо суммы $x_1 + x_2$ ее значение 2X, а вследствие (21) вместо суммы $y_1 + y_2$ ее значение 2Y и согласно (19) вместо разности $y_2 - y_1$ ее выражение $k_1(x_2 - x_1)$, мы придадим ему вид:

$$\frac{(x_2 - x_1)2X}{a^2} + \frac{k_1(x_2 - x_1)2Y}{b^2} = 0;$$

сокращая на $2(x_2 - x_1)$, мы получим окончательно:

$$\frac{X}{a^2}+\frac{k_1Y}{b^2}=0,$$

откуда (при $k_1 \neq 0$)

$$Y=-\frac{b^2}{a^2k_1}X.$$

Таким образом, координаты середин параллельных между собой хорд эллипса связаны линейной зависимостью. И, значит, середины параллельных хорд располагаются на прямой

$$y=-\frac{b^2}{a^2k_1}x.\ (22)$$

В наших рассуждениях мы предполагали, что рассматриваемые хорды имеют угловой коэффициент k и, следовательно, не параллельны оси O_y. Середины хорд, параллельных оси O_y, тоже лежат на прямой — на оси O_x (в силу симметрии эллипса относительно оси O_x). Итак, **середины параллельных хорд эллипса лежат на прямой. Прямая, проходящая через середины параллельных хорд эллипса, называется его диаметром. Все диаметры эллипса проходят через центр**. Обозначая угловой коэффициент диаметра эллипса через k_2, имеем:

$$k_2=-\frac{b^2}{a^2k_1}\ ,(23)$$

или

$$k_1k_2=-\frac{b^2}{a^2}.\ (23')$$

Условимся называть диаметр эллипса сопряженным хордам, через середины которых он проходит. Условие (23) или (23′) связывает между собой угловые коэффициенты параллельных хорд и сопряженного им диаметра. Так как это условие (23′) симметрично относительно k_1 и k_2, т. е. не меняется после перестановки k_1 и k_2, то отсюда заключаем: если диаметр с угловым коэффициентом k_2 сопряжен хордам с угловым коэффициентом k_1, то и диаметр с угловым коэффициентом k_1, сопряжен хордам с угловым коэффициентом k_2. **Таким образом, мы получаем пару диаметров, из которых каждый делит пополам хорды, параллельные другому диаметру**. **Такие два диаметра эллипса называются сопряженными между собой.** Их угловые коэффициенты k_1 и k_2 связаны условием (23) или (23′). Итак, у эллипса имеется бесчисленное множество пар сопряженных между собой диаметров: каждому диаметру соответствует свой сопряженный диаметр. В частности, **оси координат (оси симметрии эллипса) представляют собой пару сопряженных диаметров**. Эти два сопряженных между собой диаметра эллипса являются **взаимно перпендикулярными**. Такие диаметры называют главными диаметрами эллипса. Из условия (23′) следует, что угол между любой другой парой сопряженных между собой диаметров эллипса ($b \neq a$) отличен от прямого. Если же $b = a$, т. е. эллипс обращается в окружность, то условие (23′) обращается в условие перпендикулярности: $k_1\ k_2 = -1$. Таким образом, любые два сопряженных диаметра окружности перпендикулярны между собой, т. е. **всякий диаметр окружности есть главный диаметр** (ось симметрии). Из условия (23) видно, что угловые коэффициенты k_1 и k_2 двух сопряженных диаметров эллипса имеют разные знаки, т. е. диаметры проходят в смежных четвертях. При увеличении $k_1 (k_1 > 0)$ угловой коэффициент k_2 по абсолютной величине уменьшается, т. е. алгебраически также увеличивается. Это показывает, что при вращении диаметра эллипса против часовой стрелки сопряженный с ним диаметр вращается в ту же сторону.

Диаметры гиперболы. Сопряженные диаметры

Рассмотрим теперь гиперболу, отнесенную к ее осям симметрии:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad (24)$$

и систему параллельных между собой хорд с угловым коэффициентом k_1.

Производя вычисления, аналогичные проделанным для эллипса, найдем, что середины этих хорд лежат на прямой, имеющей уравнение

$$y = \frac{b^2}{a^2 k_1} x, \ (25)$$

которое может быть получено из уравнения (22) заменой b_2 на $-b_2$, так как уравнение гиперболы отличается от уравнения эллипса лишь знаком при b_2. Точно так же середины хорд, параллельных оси O_y, лежат на оси O_x. Следовательно, **середины параллельных между собой хорд гиперболы лежат на прямой**. Эта прямая называется **диаметром** гиперболы. Итак, все диаметры гиперболы суть прямые, проходящие через центр. Обозначая угловой коэффициент диаметра гиперболы через k_2 имеем:

$$k_2 = \frac{b^2}{a^2 k_1}, \ (26)$$

или

$$k_1 k_2 = \frac{b^2}{a^2}. \ (26')$$

Условимся называть диаметр гиперболы сопряженным хордам, через середины которых он проходит. Условие (26) или (26′) связывает между собой угловые коэффициенты параллельных хорд и сопряженного им диаметра. Так как условие (26′) симметрично относительно k_1 и k_2, то отсюда заключаем: если диаметр с угловым коэффициентом k_2 сопряжен хордам с угловым коэффициентом k_1, то диаметр с угловым коэффициентом k_1 сопряжен хордам с угловым коэффициентом k_2. Таким образом, мы получаем **пару диаметров, из которых каждый делит пополам хорды, параллельные другому диаметру. Такие два диаметра гиперболы называются сопряженными между собой**. Их угловые коэффициенты k_1 и k_2 связаны условием (26) или (26′). Итак, у гиперболы имеется бесчисленное множество пар сопряженных диаметров: каждому диаметру соответствует свой сопряженный диаметр. **Оси координат (оси симметрии гиперболы) представляют собой пару сопряженных и перпендикулярных диаметров.** Такие два диаметра называют **главными диаметрами гиперболы**. Из условия (26) видно, что угловые коэффициенты k_1, и k_2 двух сопряженных диаметров гиперболы имеют одинаковые знаки, т. е. диаметры проходят в одинаковых четвертях и лежат по разные стороны асимптоты (если $|k_1| =< \frac{b}{a}$, то $k_2 = \frac{b^2}{a^2 k_1}$), один из них пересекает гиперболу в двух точках, а другой гиперболы не пересекает. С увеличением k_1 ($k_1 > 0$), как следует из условия (26), k_2, оставаясь положительным, уменьшается. Это показывает, что при вращении диаметра гиперболы против часовой стрелки сопряженный с ним диаметр вращается в обратную сторону, т. е. по часовой стрелке. При этом если угловой коэффициент k_1 одного из диаметров стремится к $\frac{b}{a}$, то угловой коэффициент сопряженного диаметра тоже стремится к $\frac{b}{a}$.

Диаметры параболы

Рассмотрим параболу, заданную каноническим уравнением

$$y^2 = 2px, \quad (27)$$

и возьмем систему параллельных между собой хорд с угловым коэффициентом k. Выясним, как располагаются середины этих хорд. Обозначим концы любой из этих хорд через $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, а середину — через M(X, Y). Так как точки M_1 и M2 лежат на параболе, то их координаты должны удовлетворять ее уравнению (27), т. е.

$$y^2{}_1 = 2px_1, \ (28)$$
$$y^2{}_2 = 2px_2. \ (29)$$

С другой стороны, прямая линия M_1M_2 имеет угловой коэффициент k, что дает нам соотношение

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \ (30)$$

Наконец, заметив, что точка M является серединой отрезка M_1M_2, получим:

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2}, \ (31)$$

$$Y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \ (32)$$

Исключим из пяти соотношений (28)—(32) четыре вспомогательные величины x_1, x_2, y_1, y_2. С этой целью, вычитая равенство (28) из равенства (29), найдем:

$$y^2{}_2 - y^2{}_1 = 2p(x_2 - x_1),$$

или

$$(y_2 - y_1)(y_1 + y_2) = 2p(x_2 - x_1).$$

Внося в последнее равенство (32) вместо $y_1 + y_2$ ее значение 2Y, а вследствие (30) вместо разности $y_2 - y_1$, ее выражение $k(x_2 - x_1)$, мы придадим ему вид:

$$k(x_2 - x_1)2Y = 2p(x_2 - x_1);$$

сокращая на $2p(x_2 - x_1)$, получим окончательно

$$kY = p,$$

откуда (так как $k \neq 0$)

$$Y = \frac{p}{k}. \quad (33)$$

Таким образом, середины параллельных хорд параболы лежат на прямой

$$y = \frac{p}{k}. \quad (34)$$

Мы предполагали, что рассматриваемые хорды не параллельны оси O_y. Середины хорд, параллельных оси O_y, тоже лежат на прямой — на оси O_x (так как ось O_x является осью симметрии параболы). Итак, **середины параллельных хорд параболы лежат на прямой**. Эта прямая называется **диаметром** параболы. Диаметр, проходящий через середины параллельных хорд данного направления, условимся называть сопряженным хордам этого направления. Как видно из уравнения (34), **все диаметры параболы параллельны** оси O_x (оси симметрии параболы). Ось O_x (ось симметрии параболы), в отличие от остальных диаметров параболы, является диаметром, перпендикулярным к сопряженным ему хордам. Такой диаметр называют **главным диаметром** параболы.

Касательная

Рассмотрим точку $M(x_0, y_0)$ на коническом сечении (эллипсе, гиперболе или параболе) и проведем через нее секущую MM_1. Эта секущая пересекает коническое сечение в двух точках: M и M_1. Оставляя точку M неподвижной, заставим вторую точку пересечения M_1 неограниченно приближаться к точке M, следуя по коническому сечению. При этом секущая MM_1 будет вращаться около точки M, и то **предельное положение, которое займет секущая, когда точка M_1 сольется с M, называется касательной к коническому сечению в точке M**. Точка M называется **точкой прикосновения**. Уравнение касательной как прямой, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$, будет:

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad (35)$$

где k есть угловой коэффициент касательной в точке M, подлежащий определению. Чтобы определить k, обозначим координаты точки M_1 через $x_0 + h$, $y_0 + l$; тогда угловой коэффициент секущей MM_1 как прямой, проходящей через две точки $M(x_0, y_0)$ и $M_1(x_0 + h, y_0 + l)$, будет $\frac{l}{h}$. Угловой же коэффициент k касательной будет пределом $\frac{l}{h}$, когда h стремится к нулю (точка M_1 стремится к точке M), т. е.

$$k = \lim_{h \to 0} \frac{l}{h}.$$

Так как h и l — приращения соответственно абсциссы и ординаты точки M конического сечения, то k является пределом отношения приращения ординаты (функции) к приращению абсциссы (независимого переменного), когда это последнее стремится к нулю. Из дифференциального исчисления известно, что такой предел есть производная от ординаты y по абсциссе x, взятая для точки $M(x_0, y_0)$, т. е.

$$k = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0,$$

где значок 0 указывает, что значение производной нужно брать для точки (x_0, y_0). Зависимость же функции y от независимого переменного x задается уравнением конического сечения.

Эллипс как проекция окружности

Пусть дан эллипс своим каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a > b).$$

Рассмотрим уравнение окружности

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

описанной около эллипса. Назовем две точки M_1, и M_2, лежащие соответственно на эллипсе и окружности, соответствующими точками, если они имеют одну и ту же абсциссу и лежат по одну и ту же сторону от оси O_x. Обозначая их общую абсциссу $вел\overline{OP}$ и ординаты — $вел\overline{PM_1} = y$ и $вел\overline{PM_2}$, имеем:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \;\; \frac{x^2}{a^2}+\frac{Y^2}{a^2}=1.$$

Сравнив два последних уравнения, заключаем, что

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{Y^2}{a^2},$$

или, разрешив это уравнение относительно y_2, получаем:

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}Y^2,$$

откуда окончательно

$$y=\frac{b}{a}Y.$$

Так как $\frac{b}{a} < 1$, то мы вправе положить

$$\frac{b}{a} = \cos\varphi,$$

и зависимость между ординатами соответствующих точек представится в виде:

$$y = Y\cos\varphi.$$

Последняя формула показывает, что величина у направленного отрезка $\overline{PM_1}$ может быть рассматриваема как проекция направленно го отрезка $\overline{PM_2}$, если угол между $\overline{PM_1}$ и $\overline{PM_2}$ принять равным $\overline{PM_1}$. Отсюда следует, что если поместить окружность в плоскости, наклоненной к плоскости эллипса под углом φ, то эллипс будет являться ортогональной проекцией этой окружности.

Параметрические уравнения эллипса

Сохраняя обозначения предыдущего параграфа, напомним, что координаты соответствующих точек $M_1(x, y)$ и $M_2(X, Y)$ эллипса и окружности связаны соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= X \\ y &= \frac{b}{a}Y \end{aligned}\right\}. \quad (36)$$

Так как параметрические уравнения окружности имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} X &= a\cos t \\ Y &= a\sin t \end{aligned}\right\}$$

то, заменяя в (36) X и Y их выражениями через параметр t, получим

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= \frac{b}{a} a \sin t \end{aligned}\right\}$$

или окончательно

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{aligned}\right\}.$$

Это и есть параметрические уравнения эллипса.

5. Преобразование координат. Классификация линий

Задача преобразования координат

Положение точки на плоскости определяется двумя координатами относительно некоторой системы координат. Координаты точки изменятся, если мы выберем другую систему координат. Задача преобразования координат состоит в том, чтобы, **зная координаты точки в одной системе координат, найти ее координаты в другой системе**. Эта задача будет разрешена, если мы установим формулы, связывающие координаты произвольной точки по двум системам, причем в коэффициенты этих формул войдут постоянные величины, определяющие взаимное положение систем. Пусть даны две декартовы системы координат xOy и XO_1Y. Положение новой системы XO_1Y относительно старой системы xOy будет определено, если известны координаты a и b нового начала O, по старой системе и угол α между осями O_x и O_1X. Обозначим через x и y координаты произвольной точки M относительно старой системы, через X и Y — координаты той же точки относительно новой системы. Наша задача заключается в том, чтобы старые координаты x и y выразить через новые X и Y. В полученные формулы преобразования должны, очевидно, входить постоянные a, b и α. Решение этой общей задачи мы получим из рассмотрения двух частных случаев:

1) меняется начало координат, направления же осей остаются неизменными ($\alpha = 0$);

2) меняются направления осей, начало же координат остается неизменным ($a = b = 0$).

Перенос начала координат

Пусть даны две системы декартовых координат с разными началами O и O_1 и одинаковыми направлениями осей. Обозначим через a и b координаты нового начала O_1 в старой системе и через x, y и X, Y — координаты произвольной точки M соответственно в старой и новой системах. Проектируя точку M на оси O_1X и O_x, а также точку O_1 на ось O_x, получим на оси Ох три точки О, А и Р. Как известно, величины отрезков $\overline{OA}$, $\overline{AP}$ и $\overline{OP}$ связаны следующим соотношением:

$$вел\overline{OA} + вел\overline{AP} = вел\overline{OP}. \ (1)$$

Заметив, что $вел\overline{OA} = a$, $вел\overline{OP} = x$, $вел\overline{AP} = вел\overline{O_1P_1} = X$, перепишем равенство (1) в виде:

$$a + X = x \text{ или } x = X + a. \ (2)$$

Аналогично, проектируя М и O_1 на ось ординат, получим:

$$y = Y + b. \ (3)$$

Итак, **старая координата равна новой плюс координата нового начала по старой системе**.

Из формул (2) и (3) новые координаты можно выразить через старые:

$$X = x - a, \ (2')$$
$$Y = y - b. \ (3')$$

Поворот осей координат

Пусть даны две декартовы системы координат с одинаковым началом О и разными направлениями осей. Пусть α есть угол между осями O_x и O_X. Обозначим через x, y и X, Y координаты произвольной точки М соответственно в старой и новой системах:

$$x = вел\overline{OP}, \ y = вел\overline{PM},$$
$$X = вел\overline{OP_1}, \ Y = вел\overline{P_1M}.$$

Рассмотрим ломаную линию $\overline{OP_1MP}$ и возьмем ее проекцию на ось O_x. Замечая, что проекция ломаной линии равна проекции замыкающего отрезка, имеем:

$$пр\overline{OP_1MP} = вел\overline{OP}. \quad (4)$$

С другой стороны, проекция ломаной линии равна сумме проекций ее звеньев; следовательно, равенство (4) запишется так:

$$пр\overline{OP_1} + пр\overline{P_1M} + пр\overline{MP} = вел\overline{OP}. \quad (4')$$

Так как проекция направленного отрезка равна его величине, умноженной на косинус угла между осью проекций и осью, на которой лежит отрезок, то

$$пр\overline{OP_1} = X\cos\alpha, \quad пр\overline{P_1M} = Y\cos(90° + \alpha) = -Y\sin\alpha, \quad пр\overline{MP} = 0.$$

Отсюда равенство (4') нам дает:

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha. \quad (5)$$

Аналогично, проектируя ту же ломаную на ось O_y, получим выражение для y. В самом деле, имеем:

$$пр\overline{OP_1} + пр\overline{P_1M} + пр\overline{MP} = пр\overline{OP} = 0.$$

Заметив, что

$$пр\overline{OP_1} = X\cos(\alpha - 90°) = X\sin\alpha, \quad пр\overline{P_1M} = Y\cos\alpha, \quad пр\overline{MP} == -y,$$

будем иметь:

$$X\sin\alpha + Y\cos\alpha - y = 0$$

или

$$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha\,. \quad (6)$$

Из формул (5) и (6) мы получим новые координаты X и Y выраженными через старые x и y, если разрешим уравнения (5) и (6) относительно X и Y.

Общий случай

Пусть даны две декартовы системы координат с разными началами и разными направлениями осей. Обозначим через a и b координаты нового начала O, по старой системе, через α — угол поворота координатных осей и, наконец, через x, y и X, Y — координаты произвольной точки M соответственно по старой и новой системам. Чтобы выразить x и y через X и Y, введем вспомогательную систему координат $x_1O_1y_1$, начало которой поместим в новом начале O_1, а направления осей возьмем совпадающими с направлениями старых осей. Пусть x_1 и y_1 обозначают координаты точки M относительно этой вспомогательной системы. Переходя от старой системы координат к вспомогательной, имеем:

$$x = x_1 + a,\ y = y_1 + b.$$

Переходя, далее, от вспомогательной системы координат к новой, найдем:

$$x_1 = X\cos\alpha - Y\sin\alpha,$$
$$y_1 = X\sin\alpha + Y\cos\alpha.$$

Заменяя x_1 и y_1 в предыдущих формулах их выражениями из последних формул, найдем окончательно:

$$\left.\begin{aligned} x &= X\cos\alpha - Y\sin\alpha + a \\ y &= X\sin\alpha + Y\cos\alpha + b \end{aligned}\right\}. \quad (7)$$

Так, при $\alpha = 0$ формулы (7) обращаются в

$$x = X + a,\ y = Y + b,$$

а при $\alpha = \mathrm{b} = 0$ имеем:

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha,\ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha.$$

Из формул (7) мы получим новые координаты X и У выраженными через старые x и у, если уравнения (7) разрешим относительно X и Y.

Отметим весьма важное свойство формул (7): они линейны относительно X и Y, т. е. вида:

$$x = AX + BY + C,\ y = A_1X + B_1Y + C_1.$$

Легко проверить, что новые координаты X и Y выразятся через старые x и y тоже формулами первой степени относительно x и y.

Преобразование общего уравнения второй степени

Рассмотрим теперь общее уравнение 2-й степени между переменными x и y

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (8)$$

считая, что B $\neq$ 0. Покажем прежде всего, что при помощи поворота координатных осей его всегда можно привести к виду, не содержащему члена с произведением переменных. Повернем координатные оси на некоторый угол а, который выберем впоследствии.

Как известно, формулы преобразования координат имеют вид:

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha,$$
$$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha.$$

Заменяя в данном уравнении x и y их выражениями по формулам преобразования, получим:

$$A(X\cos\alpha - Y\sin\alpha)2 + B(X\cos\alpha - \sin)(X\sin\alpha + Y\cos\alpha) + C(X\sin\alpha +$$
$$+ Y\cos\alpha)2 + D(X\cos\alpha - Y\sin\alpha) + E(X\sin\alpha + Y\cos\alpha) + F = 0.$$

Раскрыв в этом уравнении скобки и сделав приведение подобных членов, будем иметь уравнение данной линии в новых координатах в таком виде:

$$A_1X_2 + B_1XY + C_1Y_2 + D_1X + E_1Y + F = 0,$$

где для краткости положено:

$$A_1 = A\cos^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha,$$
$$B_1 = 2(C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin2\alpha),$$
$$C_1 = A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha,$$
$$D_1 = D\cos\alpha + E\sin\alpha,$$
$$E_1 = -D\sin\alpha + E\cos\alpha.$$

Выберем угол так, чтобы коэффициент B_1 обратился в нуль, т. е. чтобы

$$2(C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0. \ (9)$$

Припомнив, что $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$ и $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos2\alpha$, перепишем уравнение (17), определяющее угол поворота a, в таком виде:

$$(C - A)\sin2\alpha + B\cos2\alpha = 0. \ (10)$$

Заметим, что $\sin2\alpha \neq 0$, так как в противном случае, как видно из уравнения (10), равнялось бы нулю и B, что противоречит условию. Поэтому уравнение (10) можно разделить на $\sin 2\alpha$, после чего получим

$$(C - A) + B\operatorname{ctg} 2\alpha = 0,$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{B}. \quad (11)$$

Таким образом, всегда можно выбрать угол α так, что после поворота координатных осей на этот угол в уравнении линии 2-го порядка исчезнет член с произведением переменных.

Угол α мы будем выбирать так, чтобы $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Получив $\operatorname{ctg} 2\alpha$ по формуле (11), мы воспользуемся известной из тригонометрии формулой (в силу выбора а знаки $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{ctg} 2\alpha$ одинаковы)

$$\cos 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\alpha}}$$

и далее по формулам

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} \text{ и } \cos\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}},$$

найдем $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, а это позволит вычислить новые коэффициенты A_1, C_1, D_1 и E_1. В результате преобразованное уравнение линии примет вид:

$$A_1X^2 + C_1Y^2 + D_1X + E_1Y + F = 0, \quad (12)$$

где все коэффициенты известны.

Классификация линий

Так как в аналитической геометрии линии определяются уравнениями, то в основу их классификации естественно положить свойства уравнений этих линий. В основу классификации линий мы положим свойства их уравнений в декартовых координатах. Перенося все члены уравнения в левую часть, мы придадим ему вид:

$$F(x, y) = 0, (13)$$

где F есть символ функции от двух переменных x и y. **Если уравнение (13)** (т. е. функция F(x, y)) **трансцендентное, то и линия, им определяемая, называется трансцендентной; если же уравнение (13) алгебраическое, то и линия, им определяемая, называется алгеб-раической**.

Например, линии, которой соответствует уравнение $y = \sin x$, трансцендентная; уравнение же

$$x^2 + y^2 - 3axy = 0$$

определяет алгебраическую линию. Так как одна и та же линия может быть представлена бесчисленным множеством различных уравнений, смотря по тому, к какой системе координат мы относим ее уравнение, то, чтобы оправдать возможность указанной классификации линий на алгебраические и трансцендентные, необходимо доказать, что **алгебраический или трансцендентный характер линии не зависит от положения осей координат**. Так как формулы преобразования координат суть алгебраические, то всякое алгебраическое уравнение при любом преобразовании координат переходит в алгебраическое. Тогда трансцендентное уравнение при любом преобразовании координат переходит в трансцендентное же, так как если бы трансцендентное уравнение перешло в алгебраическое, то путем обратного преобразования алгебраическое уравнение переходило бы в трансцендентное, что невозможно. Итак, алгебраический или трансцендентный характер линии (уравнения) не зависит от выбора осей координат, а зависит лишь от свойств самой линии.

Далее, всякое алгебраическое уравнение можно освободить от радикалов и дробей, если таковые в нем имеются. Таким образом, уравнение алгебраической линии можно привести к виду:

$$\sum Ax^S y^t = 0,$$

т. е. левая часть такого уравнения есть сумма членов вида Ax^Sy^t, где A — постоянное число, s и t — целые положительные числа (или нули). Говоря кратко, левая часть уравнения алгебраической линии есть целый многочлен. Каждый член Ax^Sy^t многочлена имеет определенное измерение, равное сумме показателей при x и y, т. е. s + t. Наивысшее из измерений всех членов уравнения называется **степенью** этого уравнения. **Если алгебраическая линия определяется в декартовых координатах уравнением n-й степени, то она называется линией n-го порядка**. Так, в предыдущем примере мы имели линию 3-го порядка; всякой прямой линии в декартовых координатах соответствует уравнение первой степени и, следовательно, прямая линия есть линия 1-го порядка; наконец, окружность, эллипс, гипербола и парабола суть линии 2-го порядка, потому что им в декартовых координатах соответствуют уравнения второй степени. Чтобы это деление алгебраических линий по их порядкам было законным, необходимо доказать, что оно не зависит от выбора осей координат, т. е. что **порядок линии остается неизменным при любом преобразовании координат**. В самом деле, формулы преобразования декартовых координат в декартовы же, как мы в свое время отметили, являются линейными, т. е. первой степени. Следовательно, заменяя в алгебраическом уравнении n-го порядка x и y их выражениями первой степени через X и Y, мы не можем повысить порядок уравнения, т. е., обозначая через n' степень преобразованного уравнения, мы имеем:

$$n' \leq n. \quad (14)$$

С другой стороны, путем обратного преобразования мы переходим от нового уравнения степени n' к старому степени n, и, следовательно, так как степень уравнения не может повыситься, то должно быть:

$$n \leq n'. \quad (15)$$

Из сопоставления этих неравенств заключаем: $n = n'$, т. е. **порядок уравнения не изменяется при преобразовании декартовых координат**. Итак, порядок алгебраической линии не зависит от выбора осей координат, а зависит лишь от свойств самой линии. В указанной классификации линий весьма существенным является то обстоятельство, что в основу положена декартова система координат. Эта классификация теряет всякий смысл, если пользоваться полярными координатами. В самом деле, как мы видели, окружность в полярных координатах может быть определена различными уравнениями:

$$r = a \text{ и } r = 2a\cos\varphi,$$

смотря по выбору полюса и полярной оси. Первое из написанных уравнений относительно текущих координат r и φ есть алгебраическое и первой степени, второе же — трансцендентное. Таким образом, в полярных координатах одна и та же линия может определяться как алгебраическим, так и трансцендентным уравнением, смотря по выбору полюса и полярной оси. Вследствие этого нельзя классифицировать линии на основе их уравнений в полярных координатах.

Лекция №2. Аналитическая геометрия в пространстве

1. Метод координат в пространстве

Прямоугольные координаты

Рассмотрим способ, позволяющий определять положение любой точки пространства числами. Через некоторую точку O пространства проведем три взаимно перпендикулярные оси O_x, O_y, O_z — оси координат, относительно которых мы будем определять положение точек пространства. Оси координат обычно располагают следующим образом: оси O_x и O_y — горизонтально, а ось O_z — вертикально; при этом ось O_x направляют вперед (в сторону читателя), ось O_y — слева направо, ось O_z — снизу вверх. Ось O_x — ось **абсцисс**, O_y — ось **ординат**, O_z — ось **аппликат**. Точка пересечения координатных осей называется **началом координат**. Затем следует выбрать единицу масштаба. Теперь положение всякой точки пространства можно определить тремя действительными числами — координатами этой точки. Всякой точке M соответствуют три точки P, Q, R на осях координат, являющиеся ее проекциями на эти оси. И наоборот, зная точки P, Q и R на осях, можно построить единственную точку M в пространстве, для которой P, Q и R являются проекциями на координатные оси. Следовательно, определение положения точки M сводится к определению положений ее проекций P, Q и R, лежащих соответственно на осях O_x, O_y и O_z. Положение точки P оси O_x вполне определяется числом x, представляющим собой величину направленного отрезка $\overline{OP}$. Это число x, координата точки P — проекции точки M на ось O_x, принимается за первую координату точки M и называется ее абсциссой.

Аналогично положение точек Q и R вполне определяется числами y и z, представляющими собой величины направленных отрезков $\overline{OQ}$ и $\overline{OR}$. Числа y и z, координаты точек Q и R — проекций точки M на оси O_y и O_z — принимаются соответственно за вторую и третью координаты точки M. Вторая координата y — **ордината** и третья z — **аппликата**. Таким образом, положение любой точки M пространства вполне определяется тройкой чисел x, y, z, первое из которых является абсциссой точки, второе — ординатой и третье — аппликатой. Координаты точки условимся записывать в скобках рядом с буквой, обозначающей ее, ставя на первом месте абсциссу, на втором — ординату и на третьем — аппликату M (x, y, z). Оси координат O_x, O_y и O_z, взятые попарно, определяют три взаимно перпендикулярные плоскости xOy, yOz и zO_x, называемые плоскостями координат. Эти три плоскости делят все пространство на восемь частей, называемых **октантами**, причем точкам каждого октанта соответствует определенная комбинация знаков координат. Если точка M лежит в плоскости координат xOy, то z = 0. Таким же образом, для точек плоскости yOz координата x = 0; для точек плоскости zOx координата y = 0. Если точка M лежит на оси O_x, то y = z = 0; аналогично для точек оси O_y координаты z и x равны нулю, для точек оси O_z координаты x и y равны нулю. В начале координат x = y = z = 0.

Координаты, которые принимаются в описанном способе для определения положения точки, называются прямоугольными, поскольку точка M определяется пересечением трех плоскостей, пересекающихся под прямыми углами, и по имени Декарта — также **декартовыми**. Каждой точке пространства в выбранной системе координат соответствует тройка чисел x, y, z — координат точки — и, обратно, всякая тройка действительных чисел x, y, z определяет в пространстве единственную точку, для которой указанные три числа являются соответственно абсциссой, ординатой и аппликатой. Поэтому задать точку — это значит задать ее координаты; найти точку — значит найти ее координаты.

Основные задачи

Метод координат применим к решению многих задач. Рассмот-рим сначала одну задачу вспомогательного характера, а затем (так же, как и в первой части книги) разберем задачу о расстоянии между двумя точками и задачу о делении отрезка в данном отноше-нии.

Задача 1. *Зная координаты точки относительно некоторой системы, найти координаты той же точки относительно новой системы, оси которой параллельны прежним осям.* Пусть координаты точки M относительно системы координат O_{xyz} есть x, y и z. Возьмем другую систему координат O_1XYZ, оси которой O_1X, O_1Y и O_1Z соответственно параллельны осям O_x, O_y и O_z и направ-лены в те же стороны. Координаты точки O_1 — нового начала — в старой системе пусть будут a, b и c. Обозначим через X, Y и Z координаты точки M в новой системе. Пусть A — проекция точки O_1 на ось O_y, а Q и Q_1 — проекции точки M соответственно на оси O_y и O_1, тогда

$$вел\overline{OQ} = вел\overline{OA} + вел\overline{AQ} = вел\overline{OA} + вел\overline{O_1Q_1}$$

или

$$y = b + Y. (1)$$

Совершенно так же, проектируя точки O_1 и M на оси O_x и O_z, найдем:

$$x = a + X, (2)$$
$$z = c + Z. (3)$$

Полученные формулы позволяют, зная X, Y и Z, найти x, y и z. Зная x, y и z, найти новые координаты X, Y и Z, нужно разрешить уравнения (2), (1) и (3) относительно X, Y и Z. Будем иметь:

$$X = x - a,\ Y = y - b,\ Z = z - c. (4)$$

Задача 2. *Найти расстояние между двумя данными точками.*

Если точка М имеет координаты x, y и z, то ее расстояние от начала координат представляет длину диагонали прямоугольного параллелепипеда, три измерения которого суть $|x|$, $|y|$ и $|z|$. Таким образом, обозначая через d искомое расстояние, имеем:

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

откуда

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ . (5)}$$

Значит, **расстояние точки M(x, y, z) от начала координат равно квадратному корню из суммы квадратов координат этой точки**. Пусть теперь даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Чтобы найти расстояние между ними, перенесем начало координат в точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, сохраняя направления осей. Относительно новых осей координаты точки M_1 будут (0, 0, 0), а координаты точки M_2 определятся формулами (4): $M_2(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Таким образом, по формуле (5) получим:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \text{ , (6)}$$

т. е. расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ равно квадратному корню из суммы квадратов разностей одноименных координат этих точек.

Задача 3. *Найти координаты точки М, делящей данный отрезок $\overline{AB}$ в данном отношении.* Пусть даны две точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и дано отношение λ, в котором некоторая точка M(x, y, z) делит направленный отрезок $\overline{AB}$:

$$\lambda = \frac{вел\,\overline{AM}}{вел\,\overline{MB}} \text{ . (7)}$$

Найдем координаты точки M. Пусть Q_1, S, Q_2 суть проекции точек A, M, B на ось O_y. Тогда $AM : MB = Q_1S : SQ_2$, так как отрезки двух прямых, заключенные между параллельными плоскостями, пропорциональны. Величины направленных отрезков $\overline{AM}$, $\overline{MB}$, $\overline{Q_1S}$ и $\overline{SQ_2}$ удовлетворяют аналогичному равенству

$$\frac{вел\,\overline{AM}}{вел\,\overline{MB}} = \frac{вел\,\overline{Q_1S}}{вел\,\overline{SQ_2}}. \quad (8)$$

Поскольку $вел\,\overline{Q_1S} = y - y_1$, $вел\,\overline{SQ_2} = y_2 - y$ и по условию $\frac{вел\,\overline{AM}}{вел\,\overline{MB}} = \lambda$, то равенство (8) примет вид:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda,$$

отк,уда

$$y - y_1 = \lambda\,(y_2 - y) \text{ или } y - y_1 = \lambda\, y_2 - \lambda\, y, \text{ т. е. } y + \lambda\, y = y_1 + \lambda\, y_2.$$

Выносся в левой части у за скобку, получим:

$$y(1 + \lambda) = y_1 + \lambda\, y_2$$

и тогда

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (9)$$

Чтобы найти координаты x и z искомой точки M, проектируем точки A, M, B на оси O_x и O_z и аналогично получаем:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad (10)$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (11)$$

Полагая в полученных формулах $\lambda = 1$, найдем координаты середины отрезка

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \; z = \frac{z_1 + z_2}{2}, \quad (12)$$

т. е. **координаты середины отрезка равны полусуммам координат его начала и конца**.

Основные положения теории проекций в пространстве

Рассмотрим две оси l_1 и l_2, пересекающиеся в точке S. Угол между ними условимся понимать как угол, на который нужно повернуть одну из них вокруг точки S, чтобы ее положительное направление совпало с положительным направлением другой оси (поворот производится в плоскости, определяемой осями). Угол условимся брать лишь в границах от 0 до π, не различая порядка, в котором указаны оси (если нет особых указаний). Поэтому угол между осями l_1 и l_2 будем обозначать или $(l_1 \hat{,} l_2)$, или $(l_2 \hat{,} l_1)$. Мы предполагали, что данные оси имеют общую точку. Рассмотрим теперь две непересекающиеся оси l_1 и l_2. Выберем произвольную точку S пространства и проведем через нее две оси $l'1$ и $l'2$, соответственно параллельные осям l_1 и l_2 и одинаково с ними направленные; углом между непересекающимися осями l_1 и l_2 мы будем считать угол между осями $l'1$ и $l'2$. Угол между осью и направленным отрезком в пространстве условимся понимать как угол между этой осью и осью, положительное направление которой совпадает с направлением данного отрезка. Углом между двумя направленными отрезками будем считать угол между осями, положительные направления которых совпадают соответственно с направлениями данных отрезков. Основные положения теории проекций легко переносятся на пространство. Проекцией точки М пространства на ось называется точка m, получаемая в пересечении оси с перпендикулярной к ней плоскостью, проходящей через точку М. Определение проекции направленного отрезка на ось остается тем же, что и на плоскости: $np_l \overline{AB} = \text{вел}\overline{ab}$. Как и в случае плоскости, проекция направленного отрезка $\overline{AB}$ на ось l равна произведению длины AB проектируемого отрезка на косинус угла α между осью проекций и данным отрезком:

$$np_l \overline{AB} = AB\cos\alpha \text{ . (13)}$$

Вычисление угла между двумя осями в пространстве

Пусть дана некоторая ось l в пространстве, и пусть α, β, γ суть углы, которые она образует с осями координат, а числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ назовем **направляющими косинусами** этой оси. Направляющие косинусы не зависимы между собой, они связаны одним соотношением. Чтобы получить это соотношение, проведем через начало координат отрезок OM, длина которого равна единице, а направление совпадает с положительным направлением оси l. Проекции этого отрезка на оси координат (они являются координатами точки М) будут $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Расстояния точки М от начала координат:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma, \text{(14)}$$

т. е. **сумма квадратов направляющих косинусов любой оси равна 1**. Найдем выражение для косинуса угла между двумя осями. Рассмотрим две оси l_1 и l_2 , проходящие через начало координат. Пусть α_1, β_1, γ_1 — углы, которые образует ось l_1 с координатными осями, и α_2, β_2, γ_2 — углы оси l_2 с координатными осями. Возьмем на оси l_1 точку М на расстоянии ОМ, равном 1, от начала координат (координаты точки М — $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$) и спроектируем координатную ломаную $\overline{OPSM}$ точки М на ось l_2. Поскольку проекция ломаной равна проекции замыкающего отрезка, то $np\overline{OPSM} = np\overline{OM} = 1\cdot\cos\varphi = \cos\varphi$. Однако проекция ломаной равна сумме проекций ее звеньев, т. е.

$$np\overline{OPSM} = np\overline{OP} + np\overline{PS} + np\overline{SM}$$

или

$$np\overline{OP} + np\overline{PS} + np\overline{SM} = np\overline{OM} = \cos\varphi\ .$$

Поскольку

$$np\overline{OP} = ве\textit{л}\overline{OP} \times \cos\alpha^2 = \cos\alpha_1 \times \cos\alpha_2,$$
$$np\overline{PS} = ве\textit{л}\overline{PS} \times \cos\beta^2 = \cos\beta_1 \times \cos\beta_2,$$
$$np\overline{SM} = ве\textit{л}\overline{SM} \times \cos\gamma^2 = \cos\gamma_1 \times \cos\gamma_2,$$

то

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2. \ (15)$$

Если оси l_1 и l_2 перпендикулярны, $\cos\varphi = 0$ и формула (15) дает **условие перпендикулярности двух осей**:

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0. \ (17)$$

Векторы и скаляры

Величины, с которыми приходится встречаться в механике, физике и других прикладных дисциплинах, бывают двоякого рода. С одной стороны, такие величины, как температура, время, масса, плотность, длина отрезка, площадь, объем и т. д., вполне характеризуются одним числовым значением. С другой стороны, такие величины, как сила, скорость, ускорение и т. д., становятся определенными только тогда, когда известно, каковы их числовые значения и направления в пространстве. Величины первого рода называются **скалярными**, или, короче, **скалярами**. Величины второго рода называются **векторными**. Всякую векторную величину геометрически можно изобразить с помощью отрезка определенной длины и определенного направления, если длину отрезка при выбранной единице масштаба примем равной числовому значению векторной величины, а направление отрезка будем считать совпадающим с ее направлением. Отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление в пространстве, будем называть **вектором**. Следовательно, вектор служит для геометрического изображения физической векторной величины.

Два вектора считаются равными, если выполнены следующие три условия:

1) длины векторов равны;
2) векторы параллельны, т. е. расположены на одной прямой или на параллельных прямых;
3) векторы направлены в одну сторону.

Следует различать начало и конец вектора; поменяв их местами, можно получить уже другой вектор (направленный противоположно первому). Из определения равенства векторов следует, что при параллельном переносе вектора получается вектор, равный исходному. Поэтому начало вектора можно помещать в любой точке пространства. Выбрав некоторое начало (точку O) удобно считать все векторы исходящими из этой точки. В таком случае мы будем говорить, что векторы приведены к общему началу O. На чертеже направление вектора отмечают стрелкой. В тексте обозначают векторы либо одной напечатанной жирно буквой, либо двумя буквами со стрелкой над ними, при этом первая буква указывает начало вектора, а вторая — его конец. Так, вектор, идущий из точки O в точку M, мы будем обозначать двумя буквами $\overrightarrow{OM}$ или просто одной буквой, которая стоит в конце вектора. Следовательно,

$$M = \overrightarrow{OM}, \; a = \overrightarrow{Oa}.$$

Если начало вектора не совпадает с выбранным началом O, то во избежание недоразумений мы будем обыкновенно употреблять две буквы $\overrightarrow{AB}$. Длина вектора, называемая также модулем (или скаляром) вектора, обозначается теми же буквами, что и вектор, но без стрелки (или же если вектор обозначен одной буквой, то той же буквой, но напечатанной нежирно). Иногда длину вектора записывают при помощи обычного в алгебре знака модуля: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Таким образом,

$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right|$ есть длина вектора, $M = \left|M\right|$ — длина вектора M.

Сложение векторов

Суммой двух векторов A и B называют третий вектор C, выходящий из их общего начала, который служит диагональю параллелограмма, сторонами которого являются слагаемые векторы, и обозначают:

$$C = A + B. \quad (1)$$

Если два вектора A и B после приведения их к общему началу лежат на одной прямой, то сумма их C есть по определению вектор, длина которого равна сумме длин слагаемых векторов и направление совпадает с направлением этих векторов, если последние одинаково направлены; если же слагаемые векторы направлены в разные стороны, то сумма их С есть вектор, длина которого равна разности длин слагаемых векторов и направление совпадает с направлением вектора, имеющего большую длину. В случае равенства длин противоположно направленных векторов их сумма есть особый «вектор», длина которого равна нулю. Такой вектор называют **нулевым вектором** и обозначают символом 0. Для сложения чисел мы имеем два основных закона.

1. **Закон переместительности:**

$$a + b = b + a,$$

т. е. сумма не зависит от порядка слагаемых.

2. **Закон сочетательности:**

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

т. е. чтобы прибавить сумму, можно прибавить последовательно каждое слагаемое.

Первый закон удовлетворяется, что непосредственно вытекает из определения сложения векторов:

$$A + B = B + A. \ (2)$$

Чтобы перейти ко второму закону (сочетательности), следует предварительно выяснить онятие суммы нескольких слагаемых. С этой целью упростим сначала самое построение суммы двух векторов. Мы условились считать равными векторы, имеющие одинаковую длину, параллельные и одинаково направленные. В силу этого векторы $\overrightarrow{OB}$ $\overrightarrow{AC}$ равны между собой. Отсюда вытекает такое правило сложения двух векторов: **в конце первого слагаемого строим второе слагаемое**. **Вектор, замыкающий эту ломаную, есть сумма**. **Начало его совпадает с началом первого слагаемого, а конец — с концом второго**.

Это правило треугольника нетрудно теперь распространить на любое число слагаемых. Пусть нужно найти сумму трех векторов A, B и C:

$$A + B + C = D,$$

причем под их суммой мы будем подразумевать результат последовательного прибавления к **A** сначала **B** и затем C. Если A + B = E, то согласно определению будет:

$$D = E + C.$$

По предыдущему правилу треугольника строим сначала сумму A + B, т. е. в точке A строим вектор $\overrightarrow{AE} = B$ и соединяем точку O с точкой E: $\overrightarrow{OE} = E = A + B$. Затем к полученной сумме прибавляем вектор C, т. е. в конце $\overrightarrow{OE}$ строим вектор $\overrightarrow{ED} = C$ и соединяем точку O с точкой D. Тогда

$$\overrightarrow{OD} = D = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED} = A + B + C.$$

Отсюда вытекает такое правило сложения векторов: **чтобы построить сумму любого числа векторов, нужно в конце первого слагаемого вектора построить второй, в конце второго построить третий и т. д. Вектор, замыкающий полученную ломаную линию, представляет искомую сумму**. **Начало его совпадает с началом первого слагаемого, а конец — с концом последнего**. В случае сложения трех векторов, не параллельных одной плоскости, сумму их можно получить и другим способом. Пусть векторы A, B, C приведены к общему началу O: $\overrightarrow{OA} = A$, $\overrightarrow{OB} = B$, $\overrightarrow{OC} = C$.

Построим на этих векторах параллелепипед. По предыдущему правилу A + B + C = = $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OD}$, но отрезок OD является диагональю параллелепипеда, таким образом, сумма данных векторов равна вектору — диагонали параллелепипеда, ребрами которого являются слагаемые векторы. Заметим, что если бы слагаемые векторы были параллельны одной плоскости (такие векторы называются **компланарными**, то мы не могли бы построить на них параллелепипед. Теперь перейдем к доказательству закона сочетательности:

$$A + (B + C) = (A + B) + C. \ (3)$$

По правилу сложения векторов

$$(A + B) + C = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OE},$$

но тому же вектору $\overrightarrow{OD}$ равна и сумма $A + (B + C)$, так как

$$A + (B + C) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD}.$$

Равенство (3) доказано. Из переместительного и сочетательного законов вытекает, что при нахождении суммы любого числа векторов можно складывать данные векторы в произвольном порядке. Заметим, что по отношению к обычной сумме чисел существуют еще различные законы **монотонности** — о сравнительной величине слагаемых и суммы, как, например, сумма положительных слагаемых больше каждого из слагаемых. Все эти законы не имеют смысла для суммы векторов, потому что понятия «больше» и «меньше» неприложимы к векторам.

Вычитание векторов

Обычно вычитание определяется как действие, обратное сложению: по сумме и одному из слагаемых отыскивается другое слагаемое. Соответственно с этим **разностью двух векторов А и В называется такой третий вектор С, что сумма В и С равна А**:

$$A - B = C, \text{ если } B + C = A.$$

Изобразим на чертеже данные векторы **A** и **B** направленными отрезками $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Проведем из точки **B** в точку **A** вектор и обозначим его через С, тогда $B + C = A$, значит,

$$A - B = C.$$

Следовательно, **чтобы из одного вектора вычесть другой, нужно отнести их к общему началу и провести вектор из конечной точки вектора-вычитаемого в конечную точку вектора-уменьшаемого**. То же действие можно произвести и иначе. Построим вектор $\overrightarrow{OB_1}$, длина которого равна длине вектора OB, а направление противоположно; кроме того, дополним треугольник OAB до параллелограмма OBAC. Очевидно, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BO}$, следовательно, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$. Заметив, что искомая разность

$$A - B = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC},$$

мы получаем следующее равенство:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB_1} = A + B_1.$$

Правило: **чтобы из вектора $\overrightarrow{OA}$ вычесть вектор $\overrightarrow{OB}$, надо прибавить к $\overrightarrow{OA}$ вектор $\overrightarrow{OB_1}$, равный по длине вектору $\overrightarrow{OB}$, но противоположно направленный**. Два вектора $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OB_1}$, имеющие равные длины, но противоположные направления, будем называть **противоположными** векторами. Сумма их равна нулевому вектору:

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB_1} = 0.$$

Вектор $\overrightarrow{OB_1}$, противоположный вектору $\overrightarrow{OB}$, условимся обозначать через $-\overrightarrow{OB}$. Так как $\overrightarrow{OB} = $ B и $\overrightarrow{OB_1} = -$B, то указанное выше правило вычитания векторов можно сформулировать следующим образом: *чтобы вычесть вектор B, нужно прибавить противоположный ему вектор (−B)*:

$$A - B = A + (-B).$$

Умножение вектора на число

Складывая несколько равных векторов, т. е. повторяя вектор слагаемым несколько раз, мы приходим к **умножению его на положительное целое число**. Согласно определению

$$A_n = A + A + \ldots + A,$$

где n есть число слагаемых векторов, равных A. Очевидно, произведение A_n будет вектором того же направления, что и множимое A, только длина вектора A_n будет больше длины вектора A в n раз. Введем теперь понятие **деления вектора на целое положительное число**. Согласно определению

$$\frac{A}{n} = A\frac{1}{n} = B,$$

если $A = B_n$. Отсюда оба вектора A и B имеют одно направление, но длина A вектора A в n раз больше длины B вектора B. Следовательно, при делении вектора на целое положительное число n направление его не меняется, а длина уменьшается в n раз. После этого можно определить умножение вектора на положительную дробь $\lambda = \frac{p}{q}$, что значит умножить на p и разделить на q, а также умножение вектора на иррациональное положительное число λ. Во всех случаях направление вектора остается без изменения, длина же умножается на λ. Если множитель λ — число отрицательное, то условимся считать, что длина вектора умножается на $|\lambda|$, а направление меняется на противоположное. В частности, при умножении вектора А на -1 мы получаем вектор $A(-1)$, имеющий ту же длину, но направленный в противоположную сторону, т. е. вектор, противоположный вектору А. Такой вектор по условию предыдущего параграфа обозначается через $-A$. Таким образом, **$A(-1) = -A$, причем $A + A(-1) = A - A = 0$**. **При умножении вектора А на число λ длина вектора умножается на $|\lambda|$, а направление сохраняется прежним при $\lambda > 0$ и заменяется противоположным при** $\lambda < 0$ (при $\lambda = 0$ произведение А на λ является нулевым вектором). Произведение А на λ мы будем обычно записывать в форме λA. По отношению к этому умножению имеет место **распределительный закон**, который символически можно записать так:

$$\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B. \quad (4)$$

От умножения на число А меняются только размеры векторов, т. е. масштаб чертежа; фигуры остаются подобными. Поэтому, так как векторы А, В и $A + B = C$ образуют стороны и диагональ параллелограмма, то, умножив все члены на А, т. е. изменив лишь размеры векторов одинаковым образом, мы получим снова параллелограмм, а значит, сохранится равенство

$$A + B = C.$$

Последнее же равенство и выражает собой распределительный закон умножения, если заменить в нем С через $A + B$. Из определения умножения вектора на число вытекает справедливость равенств

$$(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A, \quad (5)$$

и

$$\lambda_2(\lambda_1 A) = \lambda_1(\lambda_2 A) = (\lambda_1 \lambda_2)A, \quad (6)$$

где λ_1, и λ_2 — числа. Будем обозначать одноименной буквой с ноликом вверху вектор длины, равной 1, и того же направления, как и данный вектор (вектор, длина которого равна 1, называется единичным). Тогда из определения умножения вектора на число следует:

$$A = AA^0. \quad (7)$$

В самом деле, при умножении вектора A^0 на число А направление вектора не изменится, а длина сделается равной А , т. е. мы получим как раз вектор А.

Проекции вектора

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось называется длина отрезка $\overrightarrow{ab}$ этой оси, заключенного между проекциями а и b его начальной точки А и конечной точки В, взятая со знаком +, если направление отрезка $\overrightarrow{ab}$ совпадает с направлением оси проекций, и со знаком –, если эти направления противоположны. Следовательно, проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось является величина направленного отрезка ab оси. Основные положения теории проекций можно высказать следующим образом.

1. **Проекция вектора на какую-либо ось равна произведению длины вектора на косинус угла между осью и вектором**, т. е,

$$npAB = AB\cos\alpha .$$

Равные векторы имеют равные проекции на ту же ось.

2. **Проекция суммы векторов на какую-либо ось равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось**, т. е., например:

$$np(A + B + C) = npA + npB + npC,$$

где все проекции отнесены к одной и той же оси. Сумма векторов есть замыкающий вектор ломаной, у которой составляющими звеньями служат слагаемые векторы. Рассмотрим прямоугольную систему координат и произвольный вектор $\overrightarrow{OM}$. Из точки M — конца вектора $\overrightarrow{OM}$ — проведем прямую параллельно оси O_z до пересечения в точке P с плоскостью xOy и из точки P в плоскости xOy проведем прямую параллельно оси O_y до пересечения в точке M_1 с осью O_x. Очевидно, будем иметь:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{PM}.$$

Откладывая векторы $\overrightarrow{M_1P}$ и $\overrightarrow{PM}$ от точки O, заменим их равными им векторами $\overrightarrow{M_1P} = \overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM_3}$ и, значит, будем иметь:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3},$$

или иначе:

$$M = M_1 + M_2 + M_3. \quad (8)$$

Это равенство показывает, что **всякий вектор можно разложить на три слагаемых, лежащих на осях координат**. Слагаемые векторы M_1, M_2, M_3 назовем **компонентами** или **составляющими** данного вектора M относительно системы координат O_{xyz}. От точки O в положительном направлении каждой оси координат отложим по вектору длины, равной 1. Обозначим три введенных попарно взаимно перпендикулярных единичных вектора соответственно через i, j, k и назовем их **основными векторами**. Вектор M_1, как и вектор i, расположен на оси абсцисс, а потому имеем:

$$M_1 = Xi,$$

где X есть длина вектора M_1, взятая со знаком +, если направления векторов M_1 и i совпадают, и взятая со знаком -, если направление вектора M_1 противоположно направлению основного вектора **i.** Другими словами, X есть число, являющееся проекцией вектора M на ось абсцисс. Аналогично получим:

$$M_2 = Yj,\ M_3 = Zk,$$

где Y и Z — проекции вектора M соответственно на оси ординат и аппликат. Таким образом, рассматривая три проекции X, Y, Z вектора M на оси координат, перепишем равенство (7) в виде

$$M = Xi + Yj + Zk. \quad (8')$$

Это равенство дает разложение вектора по основным векторам **i**, j, k. Есть существенная разница между компонентами вектора и его проекциями. **Проекции вектора** — это три числа X, Y, Z, которые являются декартовыми координатами конца вектора — точки M, если начало вектора находится в начале координат. Называя **радиусом-вектором точки** M вектор, идущий от начала координат в точку M, мы можем сказать, что декартовы координаты X, Y, Z точки M суть проекции ее радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$. Компоненты же вектора представляют собой векторы M_1, M_2, M_3, сумма которых равна данному вектору M. Между компонентами и проекциями существует следующая простая зависимость:

$$M_1 = Xi,\ M_2 = Yj,\ M_3 = Zk, \quad (9)$$

т. е. **компонента получается умножением основного единичного вектора на проекцию**. Значение равенства (8′) в теории векторов исключительно велико. При помощи этого равенства устанавливается связь между двумя частями теории векторов — геометрической и алгебраической. Ведь векторная алгебра состоит из соединения этих двух моментов: геометрического и алгебраи-ческого. Взаимно дополняя друг друга, они и создают то, чем так выгодно отличается векторная алгебра: геометрическая теория дает возможность широко использовать геометрические представ-ления, алгебраическая же часть позволяет проводить все выкладки. Вместо полной записи

$$M = Xi + Yj + Zk \quad (8')$$

часто пользуются сокращенной:

$$M\{X, У, Z\}.(9)$$

Здесь X, Y, Z обозначают, как выше было указано, проекции вектора M или, что то же, координаты точки M, являющейся концом радиуса-вектора M.

Действия над векторами, заданными своими проекциями

Проекция суммы векторов на любую ось равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось. Применяя это предложение относительно каждой оси координат, мы заключаем: **при сложении векторов одноименные проекции их складываются**. Запишем это так: если

$$\boldsymbol{A} = X_1 i + Y_1 j + Z_1 k,\ \boldsymbol{B} = X_2\, i + Y_2\, j + Z_2\, k,$$

то

$$A + B = (X_1 + X_2)\mathrm{i} + (Y_1 + Y_2)j + (Z_1 + Z_2)k.$$

Правило вычитания векторов: **чтобы вычесть вектор, нужно вычесть его проекции**, т. е.

$$A - B = (X_1 - X_2)i + (Y_1 - Y_2)j + (Z_1 - Z_2)k.$$

Правило умножения вектора на число получим умножением обеих частей равенства A = X_1i + Y_1j + Z_1k на λ (при этом мы пользуемся свойствами умножения, отмеченными формулами (4) и (6)):

$$\lambda A = \lambda X_1 i + \lambda Y_1 j + \lambda Z_1 k.$$

Чтобы умножить вектор на число, нужно умножить все его проекции на это число.

Скалярное произведение векторов

В механике и физике часто приходится иметь дело со следующей задачей: найти работу силы F, если точка, на которую действует сила, совершила перемещение $\overrightarrow{OA}$ = A. Если точка движется по направлению силы, то, по определению, работа силы равна произведению величины силы на длину перемещения, т. е. AF. Если же точка движется под углом φ к направлению силы, то работает только та слагающая силы $\overrightarrow{OF}$, которая направлена по линии OA, а перпендикулярная слагающая уравновешивается сопротивлением. Проектируя силу на направление пути, получим:

$$npF = F\cos\varphi.$$

Следовательно, работа силы будет равна:

$$npFA = AF\cos\varphi.$$

По двум данным векторам F и A мы определяем скаляр AFcos φ.

Последний называют скалярным произведением векторов A и F. **Скалярным произведением двух векторов** называется число, равное произведению их длин, умноженному на косинус угла между ними. Скалярное произведение принято обозначать одним из трех способов:

$$AB = (AB).$$

Согласно определению имеем:

$$AB = AB\cos\left(\widehat{A, B}\right), \ (10)$$

где под $\left(\widehat{A, B}\right)$ подразумевается угол между векторами A и B. Заметив, что $B\cos\left(\widehat{A, B}\right)$ есть проекция вектора B на направление вектора A, мы можем написать:

$$AB = A\,пр_{A}B; \ (10')$$

аналогично:

$$cAB = B\,пр_{B}A, \ (10'')$$

или **скалярное произведение двух векторов равно длине одного из них, помноженной на проекцию другого вектора на направление первого**.

В частности, если $B = B^0$ есть единичный вектор, то

$$AB^0 = 1\,пр_{B^0}\mathbf{A} = пр_{B^0}\mathbf{A},$$

т. е. при скалярном умножении вектора A на единичный вектор получаем проекцию этого вектора A на направление единичного вектора.

Основные свойства скалярного произведения

1. **Скалярное произведение обращается в нуль в том и только в том случае, когда по крайней мере один из векторов является нулевым или если векторы перпендикулярны**. В самом деле, если

A = 0, или B = 0, или $\cos(\widehat{A,B}) = 0$, то $AB\cos(\widehat{A,B}) = 0$. Обратно, если AB = 0 и перемножаемые векторы не являются нулевыми, то A $\perp$ B, потому что из условия $AB\cos(\widehat{A,B}) = 0$ при A $\neq$ 0 и B $\neq$ 0 вытекает:

$$\cos(\widehat{A,B}) = 0, \text{ т. е. } A \perp B.$$

Поскольку направление нулевого вектора неопределенно, то нулевой вектор можно считать перпендикулярным к любому вектору. Поэтому указанное свойство скалярного произведения может быть сформулировано короче: **скалярное произведение обращается в нуль в том и только том случае, когда векторы перпендикулярны**.

2. **Скалярное произведение обладает свойством переместительности**:

$$AB = BA. \quad (11)$$

Это свойство непосредственно вытекает из определения:

$$AB = AB\cos(\widehat{A,B}), \; BA = BA\cos(\widehat{B,A}),$$

потому что $(\widehat{A,B})$ и $(\widehat{B,A})$ различные обозначения одного и того же угла.

3. Исключительно важное значение имеет **распределительный закон**. Его применение столь же велико, как и в обычной арифметике или алгебре, где он формулируется так: чтобы умножить

сумму, нужно умножить каждое слагаемое и сложить полученные произведения, т. е.

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Умножение многозначных чисел в арифметике или многочленов в алгебре основано на этом свойстве умножения. Такое же основное значение имеет этот закон и в векторной алгебре, так как на основании его мы можем применять к векторам обычное правило умножения многочленов. Докажем, что для любых трех векторов A, B, C **справедливо равенство**

$$(A + B)C = AC + BC. \quad (12)$$

По второму определению скалярного произведения, выражаемому формулой ($10''$), получим:

$$(A + B)C = C\,пр_C(A + B).$$

Применив теперь свойство 2 проекций, найдем:

$$(A + B)C = C(пр_C A + прCB) = C\,пр_C A + C\,пр_C B = AC + BC,$$

что и требовалось доказать.

4. **Скалярное произведение обладает свойством сочетательности относительно числового множителя; это свойство выражается следующей формулой:**

$$\lambda\,(AB) = A(\lambda\,B). \quad (13)$$

Чтобы умножить скалярное произведение векторов на число, достаточно умножить на это число один из сомножителей. Для доказательства мы вычислим отдельно левую и правую части последнего равенства (предполагая $\lambda \geq 0$)

$$\lambda\,(AB) = AB\cos(\widehat{A,B})\,\lambda\,,$$

$$A(\lambda\, B) = A(\lambda\, BB^0) = \lambda\, AB\cos(\widehat{A,B^0})$$

и заметим, что углы $(\widehat{A,B})$ и $(\widehat{A,B^0})$ равны, потому что векторы B и B^0 одного направления. Легко проверить формулу (13) и при $\lambda < 0$.

Чтобы перемножить скалярно два вектора, можно один из них умножить скалярно на единичный вектор, направленный по второму, и полученное произведение умножить на длину второго, т. е.

$$DC = (DC^0)C.$$

Скалярное произведение векторов, заданных проекциями

Обозначая через X_1, Y_1, Z_1 проекции вектора A, а через X_2, Y_2, Z_2 проекции вектора B, выразим скалярное произведение A и B:

$$AB = (X_1 i + Y_1 j + Z_1 k)(X_2\, i + Y_2\, j + Z_2\, k).$$

По свойству распределительности суммы векторов умножаются как многочлены. Следовательно, получаем:

$$AB = X_1X_2\, ii + Y_1X_2\, ji + Z_1X_2\, ki + X_1Y_2\, ij + Y_1Y_2\, jj + Z_1Y_2\, kj + X_1Z_2\, ik + \\ + Y_1Z_2\, jk + Z_1Z_2\, kk. \quad (14)$$

Поскольку i, j, k представляют три взаимно перпендикулярных единичных вектора, то

$$ij = 0,\ jk = 0,\ ki = 0,\ ii = 0,\ jj = 0,\ kk = 0,$$

значит, в полученном выражении (14) для AB пропадут шесть слагаемых и окончательная формула будет:

$$AB = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2\,. \quad (15)$$

Скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных проекций. Прилагая обычное определение степени, естественно называть скалярное произведение вектора самого на себя его скалярным квадратом. Применяя полученную формулу (15) при B = A, найдем:

$$A^2 = AA = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2\,.$$

С другой стороны, согласно определению скалярного произведения получаем:

$$A^2 = AA = AA\cos 0 = A^2\,.$$

Таким образом, мы имеем следующую формулу для определения длины вектора:

$$A^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2\,, \quad (16)$$

откуда

$$A = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\,. \quad (16')$$

Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его проекций. Проекции единичного вектора $A = A^0$ будут его направляющими косинусами, мы из формулы (16) получаем:

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma.$$

Пусть теперь даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и M_2 (x_2, y_2, z_2). Вектор $A = Xi + Yj + Zk$ есть разность векторов $\overrightarrow{OM_2} = x_2 i + y_2 j + z_2 k$ и $\overrightarrow{OM_1} = x_1 i + y_1 j + z_1 k$. Таким образом, мы имеем:

$$X = x_2 - x_1,$$
$$Y = y_2 - y_1,$$
$$Z = z_2 - z1,$$

т. е. проекции вектора на оси координат равны разностям одноименных координат конца и начала вектора. Применяя формулу (16$'$), получим:

$$A = M_1 M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ ,$$

т. е. расстояние между двумя точками равно квадратному корню из суммы квадратов разностей одноименных координат этих точек.

Направление вектора

Согласно определению скалярного произведения векторов имеем:

$$AB = AB\cos\varphi\ ,$$

где φ есть угол между векторами A и B. Из этой формулы получаем:

$$\cos\varphi = \frac{AB}{AB}\ . \ (17)$$

Косинус угла между векторами равен их скалярному произведению, деленному на произведение длин. Выражая числитель и знаменатель последней дроби посредством проекций векторов, находим:

$$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}. \quad (17')$$

В частности, полагая в формулах (17) и (17′) B = i и замечая, что в этом случае B = 1, $X_2 = 1$, $Y_2 = 0$, $Z_2 = 0$, находим:

$$\cos\alpha = \frac{Ai}{A} \quad (18)$$

или

$$\cos\alpha = \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}, \quad (18')$$

где α есть угол оси O_x с вектором A. Аналогично, взяв B = j и B = k, получим:

$$\cos\beta = \frac{Aj}{A}, \ \cos\gamma = \frac{Ak}{A} \quad (19)$$

или в координатной форме:

$$\cos\beta = \frac{Y_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}, \ \cos\gamma = \frac{Z_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}. \quad (19')$$

Последние формулы дают возможность определить направляющие косинусы вектора (т. е. косинусы углов между осями координат и вектором) по его проекциям. Далее,

$\cos\varphi = A^0B^0$ или $\cos\varphi = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2$, (20)

где α_1, β_1, γ_1 суть углы осей координат с вектором A^0,
α_2, β_2, γ_2 — углы тех же осей с вектором B^0.

Векторное произведение

Векторным произведением двух векторов А и В называется новый вектор С, длина которого численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах А и В, перпендикулярный к плоскости этих векторов и направленный в такую сторону, чтобы кратчайший поворот от А к В вокруг полученного вектора **С** представлялся происходящим против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора С. Если векторы А и В параллельны, то их векторное произведение считается равным нулевому вектору. Из этого определения следует, что **длина вектора С** равна:

$$C = AB\sin\left(\widehat{A,B}\right) \quad (21)$$

произведению длин перемножаемых векторов, умноженному на синус угла между ними. Векторное произведение А на В обозначается символом **С = А × В** или **С = [АВ]**. **Векторное произведение равно нулевому вектору в том и только том случае, когда по крайней мере один из перемножаемых векторов является нулевым или если эти векторы параллельны (коллинеарны)**. Если А = 0, или В = 0, или $\sin\left(\widehat{A,B}\right) = 0$, то $AB\sin\left(\widehat{A,B}\right) = 0$, а потому А × В = 0. Обратно, если А × В = 0 и перемножаемые векторы не являются нулевыми, то А ∥ В, потому что из условия $AB\sin\left(\widehat{A,B}\right) = 0$ при А ≠ 0 и В ≠ 0 вытекает $\sin\left(\widehat{A,B}\right) = 0$, т. е. А ∥ В. Поскольку нулевой вектор можно считать коллинеарным любому вектору, то мы можем сказать, что **векторное произведение равно нулевому вектору в том и только том**

случае, когда перемножаемые векторы коллинеарны. Условие коллинеарности векторов:

$$A \times B = 0. \quad (22)$$

В частности,

$$A \times A = 0, \quad (22')$$

поэтому является излишним вводить понятие о векторном квадрате вектора, в то время как мы рассматривали скалярный квадрат в связи со скалярным умножением.

Основные свойства векторного произведения

1. **При перестановке сомножителей векторное произведение умножается** на (–1), т. е.

$$B \times A = -(A \times B). \quad (23)$$

В самом деле, площадь параллелограмма, построенного на векторах A и B, а также и его плоскость не меняются при перестановке A и B. Поэтому векторы A × B и B × A имеют одинаковые длины и коллинеарны. Направления же этих векторов противоположны. Если смотреть на плоскость векторов A и B с конца вектора A × B, то кратчайший поворот от B к A будет казаться происходящим по часовой стрелке. Таким образом, вектор B × A должен быть направлен в противоположную сторону. В случае коллинеарности векторов A и B равенство (24) очевидно, поскольку A × B и B × A — нулевые векторы.

2.**Векторное произведение обладает свойством сочетательности относительно числового множителя**; это свойство выражается следующими формулами:

$$\lambda (A \times B) = \lambda A \times B \text{ и } \lambda (A \times B) = A \times \lambda B. \quad (25)$$

Чтобы умножить векторное произведение векторов на число, достаточно умножить на это число один из сомножителей.

Докажем первую формулу, где $\lambda > 0$. Для доказательства равенства векторов λ (A $\times$ B) и λ A $\times$ B заметим прежде всего, что длины этих векторов одинаковы:

$$|\lambda(A\times B)| = \lambda|A\times B| = \lambda AB\sin\left(\widehat{A,B}\right),$$

$$|\lambda A\times B| = |\lambda A|B\sin\left(\lambda\widehat{A,B}\right) = \lambda AB\sin\left(\widehat{A,B}\right).$$

Направления же векторов λ (**A** $\times$ **B**) и λ **A** $\times$ **B** совпадают, так как при умножении вектора на положительное число его направление не меняется.

3. **Векторное произведение подчиняется распределительному закону**, т. е.

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C. \quad (25)$$

Для доказательства заметим сначала, что произведение A $\times$ C^0, где C^0 — единичный вектор. Спроектируем вектор A = $\overrightarrow{OA}$ на плоскость, перпендикулярную к C^0, и полученную вектор-проекцию $\overrightarrow{OA_1}$ повернем в этой плоскости вокруг точки O по часовой стрелке на 90° (если смотреть на плоскость с конца вектора $\mathbf{C^0}$). Полученный вектор и равен A $\times$ C^0. В самом деле,

1) $OA_2 = OA_1$ = A cos(90° - φ) = Asin φ, где φ — угол между векторами **A** и $\mathbf{C^0}$;

2) вектор $\overrightarrow{OA_2}$ перпендикулярен к векторам A и C^0 и направлен в ту сторону, из которой кратчайшее вращение от A к C^0 представляется совершающимся против часовой стрелки. Итак, $\overrightarrow{OA_2}$ = A $\times$ C^0. Пусть теперь даны единичный вектор C^0, перпендикулярная к нему плоскость p и треугольник OA_1B_1, в котором

$$\overrightarrow{OA_1} = \boldsymbol{A},\ \overrightarrow{A_1B_1} = B$$

и

$$\overrightarrow{OB_1} = \mathbf{A} + \mathbf{B}.$$

Спроектируем $\Delta\, OA_1B_1$ на плоскость p и повернем проекцию $OA_2\, B_2$ в плоскости p по часовой стрелке на 90°. Получим $\Delta\, OA_3B_3$, в котором по предыдущему

$$\overrightarrow{OB_3} = (A + B) \times C^0,\ \overrightarrow{OA_3} = A \times C^0,\ \overrightarrow{A_3B_3} = B \times C^0.$$

Так как $\overrightarrow{OB_3} = \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{A_3B_3}$, то

$$(A + B) \times C^0 = A \times C^0 + B \times C^0. \quad (26)$$

Заметив, что $C = CC^0$, умножим теперь обе части равенств (26) на скаляр C. Применив свойство 2 векторного произведения, получим:

$$(A + B) \times CC^0 = A \times CC^0 + B \times CC^0$$

или

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C,$$

что и требовалось доказать.

Векторное произведение векторов, заданных проекциями

Обозначая через X_1, Y_1, Z_1 проекции вектора A, а через X_2, Y_2, Z_2 проекции вектора B, выразим через них векторное произведение A на B:

$$A \times B = (X_1 i + Y_1 j + Z_1 k) \times (X_2\, i + Y_2\, i + Z_2\, k).$$

По свойству распределительности суммы векторов умножаются, как многочлены. Следовательно, получаем:

$$A \times B = X_1X_2 (i \times i) + Y_1X_2 (j \times i) + Z_1X_2 (k \times i) + X_1Y_2 (I \times j) +$$
$$+ Y_1Y_2 (j \times j) + Z_1Y_2 (k \times j) + X_1Z_2 (I \times k) +$$
$$+ Y_1Z_2 (j \times k) + Z_1Z_2 (k \times k). \ (28)$$

Так как i, j, k представляют три взаимно перпендикулярных единичных вектора и вращение от j к k представляется с конца вектора i совершающимся против часовой стрелки, то

$$i \times i = 0, j \times j = 0, k \times k = 0, i \times j = -j \times i = k, j \times k = -k \times j = i,$$
$$k \times i = -i \times k = j; \ (29)$$

следовательно, в полученном выражении (28) для **A × B** пропадут три слагаемых, остальные же соединятся попарно, и окончательная формула будет:

$$A \times B = (Y_1Z_2 - Y_2 Z_1)\, i + (Z_1X_2 - Z_2 X_1) j + (X_1Y_2 - X_2 Y_1) k. \ (30)$$

Формулу (30) можно записать также в символической, легко запоминаемой форме, если воспользоваться понятием определителя 3-го порядка:

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \ (31)$$

Векторно-скалярное произведение

Если умножить скалярно два вектора A и B, то их произведение будет скаляром. При умножении третьего вектора C на этот скаляр мы получим вектор, коллинеарный вектору C. Совсем иное дело будет, если мы перемножим два вектора векторно; в результате мы получим снова вектор $A \times B$. Представляется интересным исследовать дальнейшие произведения, как скалярное, так и векторное, этого вектора на новый вектор C. В первом случае мы будем иметь векторно-скалярное произведение $(A \times B)C$, а во втором случае двойное векторное произведение $(A \times B) \times C$.

Векторно-скалярное произведение $(A \times B)C$ называется также смешанным произведением и обозначается (ABC) или ABC. Для приложения векторно-скалярного произведения весьма важным является уяснить себе его геометрический смысл. Пусть рассмат-риваемые векторы A, B и C некомпланарны. Векторное произведение $E = A \times B$ есть вектор E, по длине численно равный площади параллелограмма OADB, построенного на векторах A и B, и направ-ленный перпендикулярно к плоскости параллелограмма.

Скалярное произведение $(A \times B)C = EC$ есть произведение длины E первого множителя на проекцию второго вектора C на первый. Эта проекция C_1 как проекция вектора C на перпендикуляр к плоскости равна расстоянию точки C (конца вектора C) от плос-кости параллелограмма OADB, взятому со знаком + или –.

Построим параллелепипед на векторах A, B, C, как на ребрах. Высота этого параллелепипеда есть абсолютная величина нашей проекции C_1, а площадь основания — параллелограмма OADB — численно равна длине вектора E. Итак, произведение $EC = EC_1$ по абсолютной величине равно произведению площади основания параллелепипеда на его высоту, т. е. измеряет объем параллелепипеда. При этом важно отметить, что наше скалярное произведение дает объем параллелепипеда иногда с положительным, а иногда с отрицательным знаком. Положительный знак получается, если угол между векторами E и C острый; отрицательный — если он тупой. При остром угле между E и C вектор C расположен по ту же сторону плоскости OADB, что и вектор E, и, следовательно, из его конца C вращение от A к B будет видно так же, как и из точки E, т.е. в положительном направлении (против часовой стрелки). При тупом угле между E и C вектор C расположен по другую сторону плоскости OADB, чем вектор E, и, следовательно, из его конца C вращение от A к B будет видно в отрицательном направлении (по часовой стрелке). Другими словами, произведение (ABC) положительно, если векторы A, B и C образуют систему, одноименную с основной (взаимно расположены так же, как оси x, y, z), и оно отрицательно, если векторы A, B и C образуют систему, разноименную с основной. Итак, мы получили следующую теорему: **векторно-скалярное произведение (ABC) = (A × B)C трех некомпланарных векторов есть число, абсолютная величина которого выражает объем параллелепипеда, построенного на векторах A, B, C, как на ребрах**. **Знак произведения положителен, если векторы A, B, C образуют систему, одноименную с основной, и отрицателен в противном случае**. Из этой теоремы следует, что абсолютная величина произведения (ABC) = (A × B)C останется та же, в каком бы порядке мы ни брали сомножители A, B, C. Что касается знака, то он будет в одних случаях положительным, в других — отрицательным; это зависит от того, образуют ли наши три вектора, взятые в определенном порядке, систему, одноименную с основной, или нет. Заметим, что у нас оси координат расположены так, что они следуют одна за другой против часовой стрелки, если смотреть во **внутреннюю часть** трехгранного угла. Порядок следования не нарушится, если мы начнем обход со второй оси или с третьей, лишь бы он совершался в том же направлении, т. е. против часовой стрелки. При этом наши множители переставляются в круговом порядке.

Теорема: **круговая перестановка трех сомножителей векторно-скалярного произведения не меняет его величины. Перестановка двух соседних сомножителей меняет знак произведения**:

$$(ABC) = (BCA) = (CAB) = -(BAC) = -(CBA) = -(ACB). \quad (32)$$

Условия, при которых векторно-скалярное произведение может обратиться в нуль:

1) если среди сомножителей есть хотя бы один нулевой вектор;

2) если по крайней мере два из перемножаемых векторов коллинеарны (и их векторное произведение равно нулевому вектору), в частности:

$$(AAB) = (ABA) = (BAA) = 0; \ (33)$$

3) если три вектора A, B, C компланарны (параллельны одной и той же плоскости), потому что тогда A $\times$ B $\perp$ C и, следовательно:

$$(A \times B)C = 0.$$

Объединяя все три случая, можем сказать, что (ABC) = 0, если векторы A, B, C компланарны. Обратно, пусть (ABC) = 0. Тогда, если никакой из векторов не является нулевым и никакие два из векторов не коллинеарны, A $\times$ B и C должны быть перпендикулярны, так как их скалярное произведение равно нулю, а так как, кроме того, A$\times$B перпендикулярен к A и B, то векторы A, B, C компланарны. Следовательно, можно утверждать, что равенство

$$(ABC) = 0 \ (34)$$

есть необходимое и достаточное условие компланарности векторов A, B, C. Отсюда, в частности, следует, что формулы (34), доказанные для некомпланарных векторов, остаются справедливыми и в случае их компланарности.

Векторно-скалярное произведение в проекциях

Обозначая через X_1, Y_1, Z_1 проекции вектора **A**, через X_2 , Y_2 , Z_2 проекции вектора B и через X_3, Y_3, Z_3 проекции вектора C, найдем сначала проекции векторного произведения A $\times$ B. Согласно формуле (30) эти проекции будут:

$$\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}.$$

Зная теперь проекции первого сомножителя $A \times B$ и проекции X_3, Y_3, Z_3 второго сомножителя **C**, найдем по формуле (15) их скалярное произведение:

$$(ABC) = (A \times B)C = X_3\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} + Y_3\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} + Z_3\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}.$$

Но правая часть этого равенства есть не что иное, как разложение определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

по элементам последней горизонтали. Итак, окончательно мы будем иметь:

$$(ABC) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \quad (36)$$

т. е. **векторно-скалярное произведение трех векторов, заданных своими проекциями, равно определителю 3-го порядка, составленному из этих проекций**. При этом следует помнить, что в 1-й, 2-й и 3-й строках определителя пишутся в обычном порядке проекции 1-го, 2-го и 3-го из перемножаемых векторов. **Условие (35), необходимое и достаточное для компланарности векторов A**$\{X_1, Y_1, Z_1\}$, **B**$\{X_2, Y_2, Z_2\}$, C$\{X_3, Y_3, Z_3\}$, **запишется в виде**:

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (37)$$

Двойное векторное произведение

Мы рассмотрели векторно-скалярное произведение; теперь перейдем к векторно-векторному произведению

$$(A \times B) \times C.$$

В первом случае мы получили прекрасное геометрическое истолкование произведения; здесь же мы дадим формулу, значительно облегчающую вычисление. Эта формула имеет вид:

$$(A \times B) \times C = B(AC) - A(BC). \quad (38)$$

Обозначая искомый результат через D, найдем его проекции D_x, D_y, D_z. С этой целью сначала определяем проекции вектора $A \times B$ и получаем по формуле (30):

$$(A \times B)_x = A_y B_z - A_z B_y, (A \times B)_y = A_z B_x - A_x B_z, (A \times B)_z = A_x B_y - A_y B_x.$$

Далее, применяя ту же формулу (30), находим:

$$Dx = (A \times B)_y C_z - (A \times B)_z C_y = (A_z B_x - A_x B_z) C_z - (A_x B_y - A_y B_x) C_y = \\ = B_x (A_y C_y + A_z C_z) - A_x (B_y C_y + B_z C_z).$$

Прибавив и вычтя по $A_x B_x C_x$, получим:

$$D_x = B_x (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - A_x (B_x C_x + B_y C_y + B_z C_z).$$

Более кратко последнее выражение запишется так:

$$D_x = B_x (AC) - A_x (BC).$$

Аналогичные формулы получаются и для двух других проекций:

$$D_y = B_y(AC) - A_y(BC),\ D_z = B_z(AC) - A_z(BC).$$

Зная проекции вектора **D**, пишем самый вектор **D**:

$$D = D_x i + D_y j + D_z k.$$

Внося вместо D_x, D_y, D_z только что полученные значения, имеем:

$$D = (B_x i + B_y j + B_z k)(AC) - (A_x i + A_y j + A_z k)(BC)$$

или.

$$D = B(AC) - A(BC).$$

Заменяя, наконец, **D** его значением, найдем требуемую формулу (38). Заметим, что в двойном векторном произведении весьма важно различать порядок перемножения. Так, например, вычисляя $A \times (B \times C)$, мы получим совершенно другой вектор, а именно:

$$A \times (B \times C) = -(B \times C) \times A = (C \times B) \times A = B(AC) - C(AB)$$

Итак, получается формула

$$A \times (B \times C) = B(AC) - C(AB). \quad (39)$$

Из сопоставления формул (38) и (39) можно вывести следующее правило для запоминания разложения двойного векторного произведения: **Двойное векторное произведение равно произведе-**

нию среднего вектора на скалярное произведение двух других минус крайний вектор скобки, умноженный на скалярное произведение двух других.

При круговой перестановке векторов **A**, **B**, **C** формула (38) приводит к трем разным векторам:

$$(A \times B) \times C = B(AC) - A(BC),$$
$$(B \times C) \times A = C(BA) - B(CA),$$
$$(C \times A) \times B = A(CB) - C(AB).$$

Складывая вместе эти три равенства, получим тождество

$$(A \times B) \times C + (B \times C) \times A + (C \times A) \times B = 0. \quad (40)$$

Одно из применений формулы (39) состоит в выводе **разложения данного вектора B на две компоненты, из которых одна параллельна, а другая перпендикулярна к заданному вектору A**.

3. Геометрическое значение уравнений

Уравнение поверхности. Геометрический смысл уравнений. Две основные задачи

Уравнение поверхности. Всякую поверхность можно рассматривать как геометрическое место точек. В таком определении поверхности содержится свойство, общее всем ее точкам. Пусть x, y, z — координаты произвольной точки данной поверхности относительно некоторой прямоугольной системы координат. Можно выразить уравнение между переменными x, y и z, которому удовлетворяют координаты произвольной точки данной поверхности и только они одни. Такое уравнение называется уравнением поверхности, а входящие в него координаты x, y и z — текущими координатами.

Таким образом, можно свести изучение геометрических свойств поверхности к изучению аналитических свойств соответствующего ей уравнения.

Геометрический смысл уравнений. Всякая поверхность, рассматриваемая как геометрическое место точек, может быть представлена уравнением между координатами ее точек. И наоборот, всякое уравнение между переменными x, y и z определяет поверхность как геометрическое место точек, координаты которых x, y и z удовлетворяют этому уравнению.

Существуют две основные задачи.

1. Дана поверхность как геометрическое место точек. Требуется составить уравнение этой поверхности.

2. Дано уравнение между координатами x, y и z. Требуется исследовать форму поверхности, определяемой этим уравнением.

Сфера

Сфера — это шаровая поверхность. Сфера радиуса R с центром в точке C(a, b, c) имеет уравнение

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2. \quad (1)$$

Раскрывая скобки, получим:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + (a^2 + b^2 + c^2 - R^2) = 0. \quad (1')$$

Это уравнение содержит члены второго измерения, первого измерения и свободный член (нулевого измерения) относительно x, y и z. Это уравнение называется уравнением второй степени. Сфере соответствует уравнение второй степени относительно текущих координат. Однако не всякое уравнение второй степени определяет сферу. Из уравнения (1′) видно, что в уравнении сферы коэффициенты при квадратах координат равны, а члены с произведениями координат (xy, yz, zx) отсутствуют. И наоборот, если осуществлены два условия:

1) равенство коэффициентов при x^2, y^2 и z^2;
2) отсутствие членов xy, yz, zx,

то уравнение определяет сферу.

Следовательно, по виду данного уравнения второй степени можно решить, определяет оно сферу или нет.

Цилиндрические поверхности

Пусть данное уравнение не содержит переменной z:

$$F(x, y) = 0.$$

На плоскости координат xOy это уравнение определяет некоторую линию L — геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению. Этому уравнению удовлетворяют также координаты всех тех точек пространства, у которых две первые координаты совпадают с координатами любой точки линии L, т. е. тех точек пространства, которые проектируются на плоскость xOy в точки линии L. Совокупность таких точек — это поверхность, описанная прямой, параллельной оси O_z и пересекающей линию L.

В общем поверхность, образованная прямыми, которые параллельны некоторой данной прямой и пересекают данную линию L, называется **цилиндрической**. Линия L — ее **направляющая**, а прямые, образующие цилиндрическую поверхность, — **образующие**.

Таким образом, уравнение $F(x, y) = 0$ определяет цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны оси O_z. И наоборот, всякая цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси O_z, может быть представлена уравнением вида $F(x, y) = 0$. В самом деле, направляющая линия L может быть в этом случае взята в плоскости координат xOy и ее уравнение, рассматриваемое в пространстве, будет определять данную цилиндрическую поверхность. Аналогично, если уравнение не содержит переменного x (или y), то оно определяет цилиндрическую поверхность с образующими, которые параллельны оси O_x (или O_y).

Уравнения линии в пространстве

Всякая линия в пространстве может рассматриваться как пересечение двух поверхностей. Пусть

$$f(z, y, z) = 0 \text{ и } f_1(x, y, z) = 0 \ (2)$$

уравнения тех поверхностей, пересечение которых дает линию L. Координаты любой точки линии L удовлетворяют обоим уравнениям (2), поскольку эта точка лежит одновременно на обеих поверхностях. Линия в пространстве рассматривается как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют системе двух уравнений (2). И наоборот, система двух уравнений (2) определяет линию в пространстве как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этой системе уравнений. Уравнения (2) — это **уравнения линии L в пространстве**. Можно разными способами выбирать те поверхности, пересечением которых является данная линия L, что соответствует тому факту, что вместо системы (2) можно взять любую другую систему двух уравнений, ей равносильную. Например, уравнения оси O_z будут:

$$x = 0,\ y = 0.$$

Уравнения x + y = 0 и x – y = 0 также определяют ось O_z. Проведем через линию L две цилиндрические поверхности с образующими, которые параллельны осям O_y и O_z. Уравнения этих цилиндрических поверхностей имеют вид:

$$F(x, z) = 0,\ F_1(x, y) = 0.$$

Поскольку линию L можно рассматривать как пересечение этих цилиндрических поверхностей, то система уравнений

$$F(x, z) = 0,\ F_1(x, y) = 0\ (3)$$

определяет линию L. Каждое из этих уравнений, рассматриваемое в соответствующей плоскости координат, представляет проекцию данной линии L на плоскости xOz и xOy. Аналитически уравнения (3) получаются из уравнений (2) путем исключения переменных y и z.

Пересечение трех поверхностей

Если три поверхности, которые выражаются уравнениями

$$F(x, y, z) = 0,$$
$$F_1(x, y, z) = 0,$$
$$F_2(x, y, z) = 0,$$

имеют общую точку, то координаты ее удовлетворяют каждому из этих уравнений. Справедливо и обратное предложение: если координаты какой-либо точки удовлетворяют этим трем уравнениям, то эта точка принадлежит всем трем поверхностям. Таким образом, чтобы найти точки пересечения трех поверхностей, нужно совместно решить соответствующие им уравнения. Каждое действительное решение этой системы трех уравнений дает точку пересечения поверхностей. В случае если система урав-нений несовместна или все решения ее мнимые, то общих для всех трех данных поверхностей точек нет.

4. Плоскость

Нормальное уравнение плоскости

Положение плоскости в пространстве будет вполне определено, если задать ее расстояние p от начала O, т. е. длину перпендикуляра OT, опущенного из точки O на плоскость, и единичный вектор n^0, который перпендикулярен к плоскости и направлен от начала O к плоскости. Если точка M движется по плоскости, то ее радиус-вектор r меняется так, что все время связан некоторым условием. Для любой точки M(r), лежащей на плоскости, можно записать равенство:

$$np_{n^0}\overrightarrow{OM} = OT = p. \ (1)$$

Это условие справедливо только для точек плоскости, а нарушается, если точка M лежит вне плоскости. Следовательно, это равенство выражает свойство, общее всем точкам плоскости и только им. Тогда будем иметь:

$$np_{n^0}\overrightarrow{OM} = rn^0,$$

это значит, что уравнение (1) может быть переписано в виде:

$$rn^0 - p. \ (1')$$

Это уравнение выражает условие, при котором точка M(r) лежит на данной плоскости, и называется **нормальным уравнением этой плоскости**. Радиус-вектор r произвольной точки M плоскости имеет название **текущего радиуса-вектора**. Уравнение (1′) плоскости записано в векторной форме. Если перейти к координатам и поместить начало координат в начале векторов — точке O, то можно видеть, что проекциями единичного вектора n^0 на оси координат O_x, O_y, O_z служат косинусы углов α, β, γ, которые составлены осями с этим вектором, а проекциями радиуса-вектора r точки M служат координаты x, y, z точки M. Тогда имеем:

$$n^0\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} \text{ и } r(x, y, z).$$

В этом случае уравнение ($2'$) переходит в координатное:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \quad (4)$$

При переводе векторного уравнения ($2'$) плоскости в координатное уравнение (4) была использована формула, выражающая скалярное произведение через проекции векторов. Уравнение (4) выражает условие, при котором точка M(x, y, z) лежит на данной плоскости, и называется **нормальным уравнением этой плоскости в координатной форме**. Полученное уравнение (4) есть уравнение первой степени относительно x, y, z. Другими словами, **всякая плоскость может быть представлена уравнением первой степени относительно текущих координат**.

Выведенные уравнения ($2'$) и (4) остаются в силе и тогда, когда p = 0, т. е. данная плоскость проходит через начало координат. В этом случае за n^0 можно принять любой из двух единичных векторов, который перпендикулярен к плоскости и отличаетя один от другого направлением.

Геометрический смысл уравнения первой степени между тремя переменными. Приведение общего уравнения первой степени к нормальному виду

Известно, что всякая плоскость может быть представлена уравнением первой степени. Докажем обратную теорему: **всякое урав-**

нение первой степени между тремя переменными определяет плоскость.

Пусть имеется уравнение первой степени общего вида:

$$A_x + B_y + C_z + D = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим A, B и C как проекции на оси координат O_x, O_y и O_z некоторого постоянного вектора n, а x, y и z как проекции радиуса-вектора r точки M. В этом случае уравнение (5) может быть переписано в векторной форме следующим образом:

$$Rn + D = 0. \quad (5')$$

Уравнение (6′) может быть приведено к нормальному виду (2′). Рассмотрим следующие случаи:

1) пусть D < 0, тогда, разделив уравнение (6′) на модуль вектора **n**, т. е. на n, получим:

$$rn^0 + \frac{D}{n} = 0 ,$$

поскольку $\frac{n}{n} = n^0$. Пусть отрицательное число $\frac{D}{n}$ есть p, оно положительно, тогда будем иметь нормальное уравнение

$$rn^0 - p = 0;$$

2) если D > 0, тогда разделим уравнение (6′) на (–n), после чего запишется $r(-n^0) - \frac{D}{n} = 0$. Пусть положительное число есть p, тогда получится нормальное уравнение;

3) если D = 0, тогда уравнение ($6'$) можно разделить как на n, так и на (–n). В первом случае получится $rn^0 = 0$, а во втором — $r(-n^0) = 0$. Каждое из них является нормальным уравнением вида ($1'$).

Следовательно, уравнение ($6'$) всегда может быть приведено к нормальному виду ($2'$), однако нормальное уравнение определяет плоскость. Значит, уравнение ($6'$), а также и исходное уравнение (5), определяет плоскость. Теорема доказана.

Уравнение (5) носит название общего уравнения плоскости. Будем всякий вектор, не равный нулю и перпендикулярный к плоскости, называть нормальным вектором плоскости. Тогда вектор n{A, B, C} будет одним из нормальных векторов плоскости. Следовательно, коэффициенты A, B, C при текущих координатах в уравнении (5) имеют простой геометрический смысл: **они являются проекциями нормального вектора на координатные оси**. Свободный член D непосредственного геометрического смысла не имеет, однако его абсолютная величина, разделенная на длину n нормального вектора **n**, равна расстоянию плоскости от начала координат. Нормальное уравнение плоскости в координатной форме (2) есть частный случай общего уравнения (5). Это — тот случай, когда за нормальный к плоскости вектор выбран единичный вектор, направленный из начала координат перпендикулярно к данной плоскости.

Чтобы привести общее уравнение плоскости к нормальному виду, надо его разделить на длину вектора n{A, B, C), взяв ее со знаком + или –, в зависимости от того, будет ли свободный член D отрицательным или положительным. Другими словами, для приведения общего уравнения (5) первой степени к нормальному виду нужно умножить его на множитель

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (6)$$

При этом знак множителя следует взять противоположным знаку свободного члена D в уравнении (5) (при D = 0 знак множителя выбирается произвольно). Этот множитель M называется **нормирующим множителем**. После умножения на M уравнение (5) принимает вид:

$$MAx + MBy + MCz + MD = 0$$

и совпадает с нормальным уравнением (4). Таким образом, имеем:

$$MA = \cos\alpha,\ MB = \cos\beta,\ Mc = \cos\gamma,\ MD = \text{-p}. \ (7)$$

Подставив найденное по формуле (6) значение M в последние равенства, будут иметь место формулы для $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, p:

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ p = \pm\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.(8)$$

В этих формулах берут верхние знаки, если D < 0 (M > 0), и нижние в противном случае.

Исследование общего уравнения плоскости

Посмотрим, какое положение относительно осей координат занимает плоскость, заданная уравнением

$$A_x + B_y + C_z + D = 0,\ (9)$$

если некоторые коэффициенты этого уравнения обращаются в нуль. Если D = 0, то уравнению (9) удовлетворяют x = y = z = 0, т. е. координаты-начала. Следовательно, плоскость проходит через начало координат. Если C = 0, то уравнение (9) будет записано:

$$A_x + B_y + D = 0. \ (10)$$

Рассматривая это уравнение на плоскости xOy, будет иметь место прямая линия. Рассматривая же уравнение (10) в пространстве, будет иметь место геометрическое место тех точек, которые проектируются на плоскость xOy в точки указанной прямой. Значит, уравнение (10) определяет плоскость, параллельную оси Oz. Аналогично, если B = 0, то уравнение

$$A_x + C_z + D = 0$$

определяет плоскость, параллельную оси Oy. Если A = 0, то уравнение

$$B_y + C_z + D = 0$$

определяет плоскость, параллельную оси O_x. Вообще, если в уравнении плоскости координата z, y или x, то плоскость параллельна соответственно оси O_z, O_y или O_x. Пусть два коэффициента равны нулю, например D = C = 0. Тогда уравнение

$$A_x + B_y = 0$$

определяет плоскость, проходящую через начало координат параллельно оси O_z, т. е. это будет плоскость, проходящая через ось O_z. Уравнение вида

$$A_x + C_z = 0$$

определяет плоскость, проходящую через ось O_y, а уравнение

$$B_y + C_z = 0$$

определяет плоскость, проходящую через ось O_x. Если равны нулю два коэффициента при текущих координатах, например A = B = 0, то уравнение Cz + D = 0 определяет плоскость, параллельную оси O_x и оси O_y, т. е. плоскость, параллельную плоскости координат xOy. Таким образом, уравнения $B_y + D = 0$ и $A_x + D = 0$ определяют плоскости, параллельные соответственно плоскостям координат xOz и yOz. Если три коэффициента равны нулю, например B = C = D = 0, то уравнение $A_x = 0$ или x = 0 определяет плоскость координат yOz. Уравнения $B_y = 0$ и $C_z = 0$ определяют соответственно плоскости координат xOz и xOy.

Уравнение плоскости в отрезках

Пусть имеется плоскость, пересекающая все три координатные оси и не проходящая через начало координат. Уравнение этой плоскости можно записать в виде

$$A_x + B_y + C_z + D = 0, \quad (11)$$

где ни один из коэффициентов A, B, C, D не равен нулю. Здесь a, b, c — величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат. Поскольку точка P(a, 0, 0) лежит на плоскости, то ее координаты удовлетворяют уравнению (11):

$$Aa + D = 0$$

или

$$A = -\frac{D}{a}. \quad (12)$$

Таким же образом координаты точки Q(0, b, 0) должны удовлетворять уравнению (11), что дает:

$$Bb + D = 0$$

Или

$$B = -\frac{D}{b}. \ (13)$$

Координаты точки R(0, 0, c) удовлетворяют уравнению(11):

$$Cc + D = 0$$

или

$$C = -\frac{D}{c}. \ (14)$$

Подставляя значения A, B и C из равенств (12), (13), (14) в уравнение (13) плоскости, будем иметь:

$$-D\frac{x}{a} - D\frac{y}{b} - D\frac{x}{c} + D = 0.$$

Сокращая на D, которое в силу предположения не равно нулю, тогда найдем:

$$-\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} + 1 = 0$$

или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \ (15)$$

Это искомое **уравнение плоскости в отрезках**.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку

Пусть нужно найти уравнение плоскости, проходящей через точку M_1, заданную радиус-вектором $r_1\{x_1, y_1, z_1\}$. Возьмем любой вектор $n\{A, B, C\} \neq 0$. Найдем уравнение плоскости P, проходящей через точку M_1 перпендикулярно к вектору. Проведем радиус-вектор $r\{x, y, z\}$ в любую точку M плоскости. Тогда вектор $\overrightarrow{M_1M}$ или $r - r_1$, как лежащий в плоскости P, будет перпендикулярен к вектору n. Значит, их скалярное произведение равно нулю:

$$n(r - r_1) = 0 \quad (16)$$

условие того, что точка M лежит в плоскости P. Это равенство справедливо для всех точек этой плоскости и нарушается, как только точка M окажется вне плоскости P. Это равенство представляет собой векторное уравнение плоскости P. Выражая скалярное произведение векторов через их проекции, получим уравнение той же плоскости в координатной форме

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \quad (17)$$

Вектор n, а значит, и его проекции A, B и C совершенно произвольны (но мы исключаем случай $A = B = C = 0$, поскольку $n \neq 0$). Изменяя значения A, B и C, мы будем получать различные плоскости, проходящие через данную точку M_1. Следовательно, последнее уравнение при любых значениях коэффициентов A, B и C выражает плоскость, проходящую через данную точку.

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Требуется найти уравнение плоскости, проходящей через три данные точки, не лежащие на одной прямой. Тогда их радиус-векторы — r_1, r_2 и r_3, а текущий радиус-вектор — r. Можно получить искомое уравнение в векторной форме. Векторы $r - r_1$, $r_2 - r_1$, и $r_3 - r_1$, должны быть компланарны (они все лежат в искомой плоскости). Значит, векторно-скалярное произведение этих векторов должно быть равно нулю:

$$(r - r_1)(r_2 - r_1)(r_3 - r_1) = 0 \quad (18)$$

уравнение плоскости, проходящей через три данные точки r_1, r_2, и r_3, в векторной форме. Переходя к координатам, получим уравнение в координатах:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0\text{ , } (19)$$

где $r\{x, y, z\}$, $r_1\{x_1, y_1, z_1\}$, $r_2\{x_2, y_2, z_2\}$, $r_3\{x_3, y_3, z_3\}$. Если бы три данные точки лежали на одной прямой, то векторы $r_2 - r_1$ и $r_3 - r_1$, были бы коллинеарны. Таким образом, соответствующие элементы двух последних строк определителя, стоящего в уравнении (19), были бы пропорциональны и определитель тождественно равен нулю. Значит, уравнение (19) обращалось бы в тождество при любых значениях x, y и z. Геометрически это значит, что через каждую точку пространства проходит плоскость, в которой лежат и три данные точки.

Угол между двумя плоскостями

Даны уравнения данных плоскостей:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (20)$$

Углом между двумя плоскостями будем называть любой из двух смежных двугранных углов, образованных этими плоскостями (в случае параллельности плоскостей угол между ними можно считать равным 0 или π по желанию). Один из этих двугранных углов равен углу φ между векторами $\{A_1, B_1, C_1\}$ и $\{A_2, B_2, C_2)$, перпендикулярными к данным плоскостям. Угол φ определяется согласно формуле, а именно:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (21)$$

Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

В случае перпендикулярности двух плоскостей

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (20)$$

угол между ними равен 90°, т. е. $\cos\varphi = 0$. Поэтому имеем **условие перпендикулярности** плоскостей (20):

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Условие **параллельности плоскостей** в векторной форме может быть записано так: $n_1 = \lambda n_2$, где n_1 и n_2 обозначают векторы, перпендикулярные к данным плоскостям. Переходя к проекциям, перепишем это условие таким образом:

$$A_1 = \lambda A_2,\ B_1 = \lambda B_2,\ C_1 = \lambda C_2,$$

что равносильно условию

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Точка пересечения трех плоскостей

Чтобы найти координаты точки пересечения трех плоскостей, данных своими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$
$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0,$$

нужно решить эти уравнения совместно относительно x, y и z, так как координаты точки пересечения должны одновременно удовлетворять уравнениям всех трех плоскостей. Полное решение этой задачи в общем виде может быть дано при помощи определителей.

Если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то три плоскости пересекаются в единственной точке.

Если определитель A равен нулю, но по крайней мере один из его миноров отличен от нуля, то три плоскости либо не имеют общей точки, либо пересекаются в бесконечном множестве точек. В первом случае среди определителей 3-го порядка, принадлежащих таблице

$$\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{matrix},$$

есть по крайней мере один, отличный от нуля, и тогда одна из плоскостей параллельна линии пересечения двух других. Во втором случае все определители 3-го порядка этой таблицы равны нулю и все три плоскости проходят через одну прямую.

Если вместе с определителем A все его миноры равны нулю, то три плоскости либо не имеют общей точки, либо пересекаются в бесконечном множестве точек. В первом случае среди определителей 2-го порядка, принадлежащих выписанной таблице, есть хоть один, отличный от нуля, и тогда все три плоскости параллельны между собой; во втором же случае все определители 2-го порядка этой таблицы равны нулю и три плоскости совпадают.

Расстояние от точки до плоскости

Условимся называть **отклонением** данной точки от данной плоскости число d, равное длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость, взятой со знаком плюс, если точка и начало координат лежат по разные стороны от данной плоскости, и со знаком минус, если они лежат по одну сторону от плоскости; для точек, лежащих на плоскости, отклонение равно нулю. Расстояние от точки до плоскости равно абсолютной величине отклонения. Пусть нужно найти расстояние от данной точки $M_1(r_1)$ до плоскости, заданной нормальным векторным уравнением

$$rn^0 - p = 0.$$

Задача состоит в том, чтобы найти длину перпендикуляра M_1K, опущенного из точки M_1 на плоскость. Вектор $\overrightarrow{KM_1}$ параллелен единичному вектору n^0, значит, мы можем его представить так:

$$\overrightarrow{KM_1} = dn^0.$$

Числовой множитель d, взятый по абсолютной величине, дает искомое расстояние. Знак d будет положительным, если векторы $\overrightarrow{KM_1}$, и n^0 имеют одинаковое направление (т. е. если точки M_1 и O лежат по разные стороны плоскости), и отрицательным, если эти векторы имеют противоположные направления (т. е. точки M_1 и O лежат по одну сторону плоскости). Следовательно, d является отклонением M_1 от плоскости. Тогда будет:

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1K}$$

или

$$r_K = r_1 - dn^0.$$

Поскольку, с другой стороны, точка K лежит на плоскости

$$rn^0 - p = 0,$$

то радиус-вектор $\mathbf{r_K}$ этой точки должен удовлетворять уравнению плоскости, т. е. имеем:

$$(r_1 - dn^0)n^0 - p = 0 \text{ или } r_1n^0 - \mathrm{d} - \mathrm{p} = 0,$$

откуда

$$d = r_1n^0 - p.$$

Рассматривая выражение, полученное для d, замечаем, что оно есть результат подстановки r_1 вместо r в левую часть нормального уравнения плоскости. Выражая скалярное произведение $r_1 n^0$ через проекций сомножителей, получим в координатах

$$d = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p.$$

Другими словами, чтобы найти отклонение точки от плоскости, нужно в левую часть нормального уравнения плоскости подставить вместо текущих координат координаты данной точки. Для вычисления расстояния от точки до плоскости следует взять абсолютную величину полученного отклонения.

Содержание

Щербакова Ю.В.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Завредакцией редакцией: *А. Ю. Рагулина*
Выпускающий редактор: *М.В. Елистратова*
Корректор:

Формат: 84 × 108/32
Гарнитура: «Ньютон»